1 Regeln

Der Mathboj ist ein Mannschaftswettkampf, bei dem zwei Mannschaften um die besten Aufgabenlösungen streiten. Beide Mannschaften setzen sich aus einer Gruppe Kleine (Klasse 8/9) und einer Gruppe Große (Klasse 10-12) zusammen, die jeweils unter sich den Wettkampf bestreiten. Jede Gruppe wählt einen Kapitän, der sie offiziell vertritt.
Der Mathboj beginnt, indem beide Mannschaften die Aufgaben erhalten und 90 Minuten Zeit haben diese zu bearbeiten. Danach findet der eigentliche Wettkampf statt, bei dem die Mannschaften sich wechselseitig herausfordern und von einer Jury aus Betreuern bewertet werden.
Eine Herausforderung durch Mannschaft A erfolgt, indem sie eine Aufgabe benennt. Mannschaft B kann nun annehmen oder ablehnen.

- Annahme: Mannschaft B bestimmt einen Referenten und Mannschaft A bestimmt einen Kritiker. Beide gehen zur Tafel und der Referent stellt seine Lösung kurz, aber verständlich vor (freier Vortrag!). Dann darf der Kritiker vorhandene Fehler und Lücken aufdecken und schließen. Damit ist das Duell beendet. Die Jury vergibt nun maximal 12 Punkte. Mannschaft B erhält Punkte entsprechend der vorgestellten Lösung. Mannschaft A erhält die Hälfte der verbleibenden Punkte für das Aufdecken der Fehler und die andere Hälfte für das Schließen der Lücken.

- Ablehnung: Mannschaft A stellt den Referenten und Mannschaft B den Kritiker, ansonsten analog. Lediglich erhält die Mannschaft des Kritikers keine Punkte für das Schließen von Lücken.

Sieger ist am Ende die Mannschaft, deren Gruppen in Summe die meisten Punkte haben.
Damit alle ungefähr gleichhäufig dran sind, muss in den Gruppen gelten, dass bis auf ein Mitglied X alle n oder $n+1$ Mal an der Tafel waren, X darf n bis $n+2$ Mal.
Jede Gruppe darf einmalig jemanden an der Tafel austauschen.

2 Aufgaben Klasse 8/9

1. Gibt es eine natürliche Zahl n, für welche der Bruch $\frac{63n+4}{49n+3}$ nicht vollständig gekürzt ist? [*Lösung*: Nein, Euklidischer Algorithmus]

2. Es seien $a_1 = \frac{1}{2007}$ und $a_2 = \frac{1}{2008}$. Damit sei eine rekursive Folge definiert:
$$\begin{aligned} a_3 &:= a_2 - a_1 \\ a_4 &:= a_3 - a_2 \\ a_5 &:= a_4 - a_3 \\ &\dots \end{aligned}$$
Berechne die Summe der ersten 2007 Glieder dieser Folge! [*Lösung*: $a_1 + \dots + a_6 = 0, \frac{1}{1004}$]

3. Gegeben sei eine geschlossene Kurve, die ein konvexes Flächenstück begrenzt. Eine Strecke maximaler Länge mit Endpunkten auf der Kurve heiße Durchmesser. So hat zum Beispiel ein Kreis unendlich viele Durchmesser, eine Ellipse im Allgemeinen aber nur einen. Zeige, dass zwei Durchmesser niemals parallel sein können! [*Lösung*: indirekt, zwei Durchmesser bilden ein Parallelogramm mit längerer Diagonale (Dreiecksungleichung)]

4. $a+b+c = 7$, $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{7}{10}$, $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = ?$ [*Lösung*: $\frac{19}{10}$, Gleichungen multiplizieren]

5. Sei $ABCD$ ein Rechteck mit $\left|\overline{BC}\right| = 3 \cdot \left|\overline{AB}\right|$. Seien weiter P und Q Punkte auf der Seite $\overline{AC}$ mit $\left|\overline{BP}\right| = \left|\overline{PQ}\right| = \left|\overline{QC}\right| = \left|\overline{AB}\right|$. Zeige, dass dann $\angle CBD = \angle CPD + \angle CQD$ ist. [*Lösung*: Skizze machen, dann sieht man's mit Innenwinkelsumme]

6. Auf einer Party sind 100 Leute. Unter beliebigen vier von ihnen gibt es eine Person, die mit den drei anderen befreundet ist. Zeige, dass bis auf höchstens drei Ausnahmen alle Partygäste mit allen anderen befreundet sind. [*Lösung*: indirekt, vier mit zweimal nichtbefreundet, Widerspruch]

7. Welche ist die kleinste natürliche Zahl, welche bei der Teilung durch 2 den Rest 1, bei der durch 3 den Rest 2, bei der durch 4 den Rest 3, usw. bis bei der Teilung durch 10 den Rest 9 lässt? [*Lösung*: $\text{kgV}(2, \dots, 10) = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 = 2520, -1$]

8. Gibt es eine Quadratzahl, die auf die Ziffernfolge 987654321 endet?
[*Lösung*: ja $111111111111111111111111111111111^2$]

9. Finde alle Paare (p, q) von Primzahlen, sodass auch $p^q + q^p$ eine Primzahl ist! [*Lösung*: $(2, 3), (3, 2)$, ein von beiden gerade, dann modulo 3]

10. Gegeben seien sechs nebeneinander stehende Felder. Anna schreibt in eines der Felder eine der Ziffern von 0 bis 9, danach füllt Bernd ein noch nicht belegtes Feld auf dieselbe Weise usw. Bernd gewinnt, wenn die nach sechs Schritten aus den Ziffern der Felder gebildete Zahl durch 13 teilbar ist, ansonsten gewinnt Anna. Wer hat eine Gewinnstrategie? [*Lösung*: $7 * 11 * 13 = 1001 | abcabc$, Bernd gewinnt]

11. Hat das Quadrat der mit 2007 Einsen geschriebenen Binärzahl 11 … 1 mehr Nullen oder mehr Einsen in seiner Binärdarstellung? [*Lösung*: gleichviele, $2^{2007} - 1$]

12. Annika und Bianca spielen auf einem $2n \times 2n$ Raster folgendes Spiel: Sie markieren abwechselnd eine Kante zwischen zwei benachbarten Punkten (Vierernachbarschaft), so dass ein geschlossener Streckenzug entsteht, bei dem an keinem Punkt des Streckenzuges drei Strecken aufeinandertreffen. Gewonnen hat diejenige, die die letzte Kante markiert. Annika fängt an. Wer besitzt eine Gewinnstrategie? [*Lösung*: Annika, Mitte kreuzen und dann spiegelsymmetrisch]

13. Ein Würfel sei so in endlich viele Quader zerlegt, dass der Rauminhalt der Umkugel des Würfels so groß ist wie die Summe der Rauminhalte der Umkugeln aller Quader der Zerlegung. Man beweise, dass dann alle diese Quader Würfel sind. [*Lösung*: Mittelungleichung Raumdiagonalen bestimmen Volumen]

14. Auf einem Platz stehen zwei Fahnenmaste im Abstand von 10 Metern. Der eine ist 12 Meter hoch, der andere 22 Meter hoch. Dirk Nowitzki hat eine Augenhöhe von genau 2 Metern und läuft auf dem Platz entlang derjenigen Kurve, auf der er an jedem Ort die Spitzen der beiden Fahnenmaste unter demselben Winkel sieht. Wenn er diese Kurve genau einmal abläuft, wie weit ist er dann gelaufen? [*Lösung*: $\frac{40}{3}\pi$, Appolonius-Kreis]

15. Jedes Feld eines 4×7 Schachbretts ist zufällig schwarz oder weiß. Beweise, dass es ein rechteckiges Teilfeld gibt, dessen vier voneinander verschiedenen Eckfelder die gleiche Farbe haben. [*Lösung*: auf 3×7, Schubfach nach 7 Spalten liefert vier mit o.B.d.A. Weißüberschuss, davon haben 2 ihr maximal eines weißes Feld in der gleichen Zeile]

3 Aufgaben Klasse 10–12

1. Man finde ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten, welches $x_N := \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ als Nullstelle besitzt. [*Lösung*: intelligent quadrieren]

2. Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge 1. Nun wird in die durch dieses Dreieck bestimmte Ebene so ein Kreis gelegt, dass dieser eine der Seiten des Dreiecks in deren Mittelpunkt berührt und gleichzeitig durch den der Seite gegenüberliegenden Eckpunkt des Dreiecks verläuft. Wie groß ist der Flächeninhalt des Teils der Ebene, den sowohl Kreis als auch Dreieck überdecken? [*Lösung*: Hilfslinie Schnittpunkte des Kreises mit dem Dreieck]

3. Wie lautet die vierte Nachkommastelle von $\frac{1}{e}$? Taschenrechner zählt **nicht** als Begründung! [*Lösung*: Taylorentwicklung]

4. Kann man die Zahl 1 als Summe von genau 2007 verschiedenen Stammbrüchen schreiben? [*Lösung*: ja, Zweierpotenzen]

5. Eine nicht negative reelle Zahl heißt dreisam, wenn sie eine Dezimaldarstellung besitzt, in der höchstens die Ziffern 0 und 3 vorkommen. Zeige, dass jeder positive reelle Zahl x die Summe von neun (nicht unbedingt verschiedenen) dreisamen Zahlen ist! [*Lösung*: $\frac{x}{3}$ ist Summe von neun einsamen Zahlen]

6. Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel mit Standardbezeichnung. Seien X, Y und Z die Mittelpunkte von AE, EF und FG. Bestimme $\sphericalangle XYZ$. [*Lösung*: regelmäßiges Sechseck, 120°]

7. Man zeige: Ist $a^b + 1$ mit positiven natürlichen Zahlen a, b und $a > 1$ eine Primzahl, so ist b eine Zweierpotenz. [*Lösung*: $a^{2k+1} + 1^{2k+1} = (a+1)(\dots)$]

8. Das Spiel „Dame“ wird auf einem Schachbrett gespielt. Dabei stehen alle Spielsteine jeweils nur auf den schwarzen Feldern. Ein Schlag-Zug mit einer Dame besteht darin, dass man mit einer (eigenen) Dame über einen (gegnerischen) Spielstein, welcher auf einem diagonal an das Spielfeld der Dame angrenzenden Spielfeld steht, hinwegspringt, und auf dem Spielfeld direkt hinter dem geschlagenen Stein landet. Dieses Spielfeld muss dafür unbesetzt sein (amerikanische Dame-Variante; Checkers)! Der gegnerische Spielstein wird nun entfernt. Sollte man nach dem „Landen“ mit der Dame von dort aus einen weiteren Schlagzug ausführen können, so muss man dies tun (die „Richtung“, in welche geschlagen wird, darf dabei aber wieder variieren, ist also unabhängig von der des ersten Sprungs).

   Was ist die maximale Anzahl an sukzessiven Schlagzügen, die man mit einer Dame „auf einen Streich“ absolvieren kann, wenn dafür die (gegnerischen und eigenen) Spielsteine optimal stehen? (Diese Situation wird in einer „realen“ Dame-Partie nie auftreten.) [*Lösung*: neun, färben]

9. Man beweise die Ungleichung

$$\frac{\sqrt{1\cdot 2}}{3} + \frac{\sqrt{2\cdot 3}}{5} + \frac{\sqrt{3\cdot 4}}{7} + \dots + \frac{\sqrt{2006\cdot 2007}}{4013} < 1003.$$

   [*Lösung*: einzeln, $\leq \frac{1}{2}$, AM-GM]

10. Auf einem Tisch liegen 2006 weiße, 2007 rote und 2008 schwarze Steine und außerdem sei ein genügend großer Vorrat an Steinen der drei Farben vorhanden. Peter führt nacheinander Züge aus, indem er bei jedem Zug zwei Steine verschiedener Farbe entfernt, dafür aber einen Stein der dritten Farbe neu auf den Tisch legt. Nach einer Stunde liegt nur noch genau ein Stein auf dem Tisch. Wie lange dauert ein Zug? Welche Farbe hat der letzte Stein? [*Lösung*: Stunde durch $2006 * 3 + 2 = 6020$, rot, gerade Differenz zwischen Farben]

11. Von einer zweistelligen Funktion A, welche je zwei nat. Zahlen eine weitere natürliche Zahl zuordnet, wissen wir folgendes:

- $f(0,n) = n+1$; für jedes $n \in \mathbb{N}_0$,
- $f(m+1,0) = f(m,1)$; für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ und
- $f(m+1,n+1) = f(m, f(m+1,n))$; für jedes $m,n \in \mathbb{N}_0$.

Man bestimme $f(4,2007)$. [*Lösung*: Ackermann, $-3+$ Zweierpotenzturm der Höhe 2010]

12. Kevin steht an einer dreispurigen Autobahn und sieht drei Autos gleichen Typs auf den drei Spuren ankommen. Als sie über eine Fuge fahren, die quer auf der Fahrbahn verläuft, will es der Zufall, dass die Autos fünf Töne in genau gleichen Abständen verursachen, wobei der vierte Ton stärker als die anderen ist. Der Abstand vom ersten zum letzten Ton beträgt genau eine Sechstelsekunde. Kevin weiß, dass der Achsstand der Autos 2,5m beträgt, und an die Geschwindigkeitsbeschränkung von 130 km/h haben sich augenscheinlich auch alle Autos in etwa gehalten. Wie schnell waren die Autos? Und auf welcher Spur fuhr das Auto, das den ersten Ton verursacht hat?

    [*Lösung*: Wegen Geschwindigkeitsbegrenzung keine zwei aufeinanderfolgenden Tone vom selben Auto. Somit müssen Ton1/Ton 4a, Ton2/Ton4b und Ton3/Ton5 zum selben Auto gehören. Damit ergeben sich 20 m/s , 30 m/s und 30 m/s; das langsamste Auto machte o den ersten Ton, war also wohl ganz rechts.]

13. Beweise
$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$
    [*Lösung*: Aus $2n$ Abgeordneten n auswählen = Aus den ersten n k auswählen und aus den zweiten n $n-k$]

14. Mit R_k sei diejenige Zahl gemeint, deren Deziamlzahldarstellung genau aus einer Folge von k Einsen besteht. So ist z.B. $R_5 = 11111$. Für welche natürlichen Zahlen k ist R_{10^k} durch 17 teilbar? (Taschenrechner erlaubt.) [*Lösung*: $k \geq 4$, $17 | R_m = (10^m - 1)/9 \iff m | \operatorname{ord}_{17}(10) = 16$]

15. Es sei M eine Menge aus 1005 natürlichen Zahlen kleiner-gleich 2007. Weise nach, dass es drei Zahlen a, b, c aus M gibt mit $a + b = c$. [*Lösung*: ordnen, $a_1, \ldots, a_{1005}, a_2 - a_1, \ldots, a_{1005} - a_1$ Schubfach]

16. Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $n^4 + 4$ prim? [*Lösung*: Sophie-Germain-Identität $a^4 + 4b^4 = \ldots$]

17. Die Folge a_n ist definiert durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2}$ für $n \geq 1$. Wird a_n beliebig groß? Zeige, dass $a_{2007} > 18$ ist. [*Lösung*: Mit der Rekursion folgt $a_{n+1}^3 > a_n^3 + 3$ also $a_n^3 \geq 3n - 2$ für $n \geq 1$. Insbesondere $a_{2007}^3 > 6019 > 5832 = 18^3$.]

18. Für n Elemente gibt es genau $n!$ Permutationen von diesen. Eine Permutation heiße fixpunktfrei, wenn keine der Elemente durch die Permutation auf sich selbst abgebildet wird. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eine fixpunktfreie Permutation zu erhalten, wenn man gleichverteilt aus allen möglichen Permutationen zieht, und n gegen unendlich geht? [*Lösung*: $\frac{1}{e}$, Zykel betrachten $(1,k)$ rekursiv $R(n-2)$, sonst $(1,k,\ldots)$ und $R(n-1)$ mit Identfizierung von 1 und k]

19. Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck und P ein Punkt auf dessen Umkreis. Es seien U,V bzw. W die Lotfußpunkte von P auf BC, CA bzw. AB. Beweise U, V und W liegen auf einer Geraden. [*Lösung*: Sehnenvierecke $PWAV$ und $PBUW$ liefert Winkel bei W gleich 180°]

20. Gegeben sei ein genügend großer Vorrat von gleichseitigen Dreiecken und Quadraten, alle mit Seitenlänge 1. Eine Figur heißt konvex, wenn für je zwei Punkte dieser Figur auch die gesamte Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte zur Figur gehören. Wie viele Ecken kann ein konvexes n-Eck höchstens besitzen, wenn es sich überlappungs- und lückenfrei aus den obigen Dreiecken und Quadraten zusammenlegen lässt? [*Lösung*: Zwölfeck, Innenwinkel $\leq 150°$]

21. Es ist $\varphi(n) := |\{1 \leq a \leq n : \mathrm{ggT}(a,n) = 1\}|$ (Eulersche φ-Funktion). Beweise

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

[*Lösung*: Brüche von $\frac{1}{n}$ bis $\frac{n}{n}$ kürzen]

22. Es sei X eine endliche Punktmenge im Raum. Für zwei Punkte $A, B \in X$ gilt, dass immer noch ein dritter Punkt $C \in X$ auf der Geraden durch A und B liegt. Beweise, dass alle Punkte aus X auf einer Geraden liegen. [*Lösung*: Extremalprinzip: Punkt und Gerade mit minimalem Abstand betrachten und kleineres Paar finden]

23. Unter einer Gruppe G versteht man eine Menge von Elementen mit einer binären Verknüpfung $\circ$, die je zwei Elementen der Gruppe wieder eines zuordnet, mit folgenden Eigenschaften:

    - Es existiert ein neutrales Element e in der Gruppe, d.h.

    $$\underset{e\in G}{\exists} \underset{a\in G}{\forall} a \circ e = e \circ a = a.$$

    - Für jedes Element a der Gruppe existiert ein inverses Element, d.h

    $$\underset{a\in G}{\forall} \underset{b\in G}{\exists} a \circ b = b \circ a = e.$$

    - Die Verknüpfung ist assoziativ, d.h

    $$\underset{a,b,c\in G}{\forall} a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c.$$

    Sei G nun eine Gruppe, in der jedes Element selbstinvers ist, d.h. für alle Gruppenelemente a gilt: $a \circ a = e$. Man beweise, dass die Gruppe kommutativ ist, d.h. für je zwei Elemente a und b also $a \circ b = b \circ a$ gilt. (Hinweis: Nicht jede Gruppe ist kommutativ! So z.B. nicht die Gruppe der Permutationen von 3 Elementen, wobei die Gruppenverknüpfung die Hintereinanderausführung von zwei solchen Permutationen ist.) [*Lösung*: $(ab)(ab) = e = (aa)(bb)$]

24. Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck und P sowie Q zwei Punkte im Innern. $X_B \in AP \cap CQ$ und $Y_B \in AQ \cap CP$. Nun sei l_B die Gerade durch X_B und Y_B, analog seien l_A und l_C definiert. Zeige l_A, l_B und l_C schneiden sich in einem Punkt. [*Lösung*: Satz von Pappos: X_A, Y_A und der Schnittpunkt von l_B mit l_C liegen auf einer Geraden]

25. Drei Brüder wohnen in einem Haus,
die sehen wahrhaftig verschieden aus,
doch willst Du sie unterscheiden,
gleicht jeder den anderen beiden.
Der erste ist nicht da, er kommt erst nach haus.
Der zweite ist nicht da, er ging schon hinaus.
Nur der dritte ist da, der kleinste der drei,
denn ohne ihn gäb's nicht die anderen zwei.
Und doch gibt's den dritten, um den es sich handelt,
nur weil sich der erst' in den zweiten verwandelt.
Denn willst Du ihn anschaun, so siehst du nur wieder
immer einen der anderen Brüder!
Nun sage mir: Sind die drei vielleicht einer?
Oder sind es nur zwei? Oder ist es gar – keiner?
Und kannst du, mein Kind, ihre Namen mir nennen,
so wirst du drei mächtige Herrscher erkennen.
Sie regieren gemeinsam ein großes Reich –
und sind es auch selbst! Darin sind sie gleich.

    [*Lösung*: Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft]