Die Vermutung von Obata für Dimension 2

Vladimir S. Matveev*

Keywords: geodesic and projective transformations, geodesically equivalent metrics, projectively related metrics, Dini's Theorem, Liouville metrics, integrable systems, quadratically integrable geodesic flows
MSC2000: 53A20, 54H17, 58F07, 53C05, 53C15, 53C22, 53C24, 58F17, 53A15

Abstract

We prove that if a connected Lie group acts on a connected closed Riemannian surface of nonconstant curvature by diffeomorphisms that take (unparametrized) geodesics to geodesics, then it acts by isometries.

1 Das Resultat

Sei (M^n, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$.

Definition 1. *Eine Metrik $\bar{g}$ auf M^n heißt* **geodätisch äquivalent** *zu g, wenn jede Geodätische von g, betrachtet als unparametrisierte Punktmenge, auch Geodätische von $\bar{g}$ ist. Ein Diffeomorphismus $F : M^n \to M^n$ heißt* **projektive Transformation** *der Mannigfaltigkeit, wenn die zurückgezogene Metrik F^*g geodätisch äquivalent zu g ist.*

Die erste große Arbeit über Ein-Parameter-Familien von projektiven Transformationen ist [9] von Lie, 1882.

Unser Hauptresultat ist:

Theorem 1 (Vermutung von Obata für Dimension 2;[4, 16, 23]). *Sei (M^2, g) eine zusammenhängende geschlossene 2-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Operiert die Lie-Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ auf (M^2, g) mit projektiven Transformationen, so operiert sie isometrisch, oder die Metrik hat konstante positive Krümmung.*

Die Gruppen von projektiven Transformationen von Riemannschen Flächen konstanter Krümmung wurden im wesentlichen schon in Beltrami [1] beschrieben. Auf der Standard-Sphäre S^2 (mit der von der euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^3$ induzierten Metrik) operiert die Gruppe $\pm SL(3, \mathbb{R})$ wie folgt: eine lineare Transformation $A \in \pm SL(3, \mathbb{R})$ operiert mit dem Diffeomorphismus

$$a : S^2 \to S^2, \quad a : x \mapsto \frac{Ax}{|Ax|}.$$

*Mathematisches Institut, Universität Freiburg, 79104 Germany.
Email: matveev@email.mathematik.uni-freiburg.de

Da die Transfomation A linear ist, überführt sie die Ebenen in Ebenen, also bildet der Diffeomorphismus a die Schnittmenge der Sphäre und jeder Ebene auf die Schnittmenge einer Ebene und der Sphäre ab, also bildet er die Großkreise auf Großkreise ab. Es ist einfach zu sehen, dass die Aktion von $SL(3,\mathbb{R})$ mit der Involution $x \mapsto -x$ kommutiert. Also ist die Gruppe von projektiven Transformationen von RP^2 (mit Standard-Metrik) $SL(3,\mathbb{R})$.

Ich möchte mich bei D. Alekseevsky für Formulierung des Problems, bei M. Ansorge, F. Auer, V. Bangert und R. Schneider für Diskussionen und grammatische Verbesserungen und bei DFG-Schwerpunkt 1154 (Globale Differentialgeometrie) für finanzielle Unterstützung bedanken.

2 Beweis

Das Hauptinstrument ist

Theorem 2 ([10, 11, 12, 14, 19]). *Seien g, $\bar g$ Riemannsche Metriken auf M^2. Dann sind sie genau dann geodätisch äquivalent, wenn die Funktion*

$$I : TM^2 \to \mathbb{R}, \quad I(\xi) := \bar g(\xi,\xi)\left(\frac{det(g)}{det(\bar g)}\right)^{2/3}$$

ein Integral des geodätischen Flusses der Metrik g ist.

Ein Vektorfeld v auf M heißt **projektiv**, wenn der Fluss des Vektorfeldes mit projektiven Transformationen operiert. Eine 1-Parameter Gruppe von projektiven Tranformationen F_t gibt uns sofort ein projektives Vektorfeld $\left(\frac{d}{dt}F_t\right)_{|t=0}$.

Die infinitesimale Version des Theorems 2 ist:

Korollar 1. *Sei g eine Riemannsche Metrik auf M^2. Ist v ein projektives Vektorfeld, so ist die Funktion $I : TM \to \mathbb{R}$*

$$I(\xi) := -(\mathcal{L}_v g)(\xi,\xi) + \frac{2}{3}\mathrm{trace}(g^{-1}\mathcal{L}_v g)\, g(\xi,\xi)$$

ein Integral des geodätischen Flusses der Metrik g. Hier ist $\mathcal{L}_v g$ die Lie-Ableitung von g bezüglich v, und $\mathrm{trace}(g^{-1}\mathcal{L}_v g)$ ist die Spur des Tensors $g^{i\alpha}\mathcal{L}_v g_{\alpha j}$.

Man kann das Korollar 1 als 2-dimensionale Version von Topalov [20] ansehen.

Beweis von Korollar 1: Man betrachte den Fluss F_t des Vektorfeldes v. Sei g_t die zurückgezogene Metrik $F_t^* g$. Nach Theorem 2 ist für alle $t \in [-\epsilon,\epsilon]$ die Funktion $I_t(\xi) = g_t(\xi,\xi)\left(\frac{det(g)}{\det(g_t)}\right)^{2/3}$ ein Integral, also ist die Funktion $\left(\frac{d}{dt}I_t(\xi)\right)_{|t=0}$ auch ein Integral. Wir haben:

$$\left(\frac{d}{dt}I_t(\xi)\right)_{|t=0} = \frac{d}{dt}\left(g_t\left(\frac{det(g)}{det(g_t)}\right)^{2/3}\right)_{|t=0}(\xi,\xi)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{det(g)}{det(g_t)}\right)^{2/3}_{|t=0} \left(\frac{dg_t}{dt}\right)_{|t=0} (\xi,\xi) \\
&- \frac{2}{3}\left(\frac{det(g)}{det(g_t)}\right)^{-2/3}_{|t=0} \left(\frac{det(g)}{det(g_t)}\right)_{|t=0} \frac{d}{dt}\big(det(g^{-1}g_t)\big)\, g(\xi,\xi) \\
&= -\left(\mathcal{L}_v g\right)(\xi,\xi) + \frac{2}{3}\mathrm{trace}(g^{-1}\mathcal{L}_v g)\, g(\xi,\xi).
\end{aligned}
$$

$\square$

Das Integral I ist quadratisch in den Geschwindigkeitsvariablen. Die quadratischen Integrale bilden einen Vektorraum: wenn zwei Integrale in den Geschwindigkeitsvariablen quadratisch sind, ist auch jede Linearkombination ein in den Geschwindigkeitsvariablen quadratisches Integral. Wir bezeichen diesen Vektorraum mit $\mathcal{I}(M^2, g)$. Die Dimension von $\mathcal{I}(M^2, g)$ ist mindestens 1, weil die Energie-Funktion $g(\xi,\xi)$ ein Integral ist. Hat g eine geodätisch äquivalente Metrik $\bar g$ mit $\bar g \neq$ Konst g, so ist die Dimension von $\mathcal{I}(M^2, g)$ mindestens 2.

Das folgende Lemma zeigt, dass die Räume $\mathcal{I}(M^2, g)$ und $\mathcal{I}(M^2, \bar g)$ kanonisch isomorph sind, sobald g und $\bar g$ geodätisch äquivalent sind.

Lemma 1. *Sei $\bar I : TM^2 \to \mathbb{R}$, $\bar I(\xi) := \bar f(\xi,\xi)$ ein Integral des geodätischen Flusses der Metrik $\bar g$, wobei $\bar f$ eine Bilinearform ist. Ist g geodätisch äquivalent zu $\bar g$, so ist die Funktion $I(\xi) := \bar I(\xi)\left(\frac{det(g)}{det(\bar g)}\right)^{\frac{2}{3}}$ ein Integral des geodätischen Flusses der Metrik g.*

Korollar 2. *Sei $\mathcal{I}(M^2, g)$ zweidimensional mit der Basis $\{I_1, I_2\}$. Betrachte die Menge $\{P \in M^2 : I_{1|T_PM^2} = Konst\, I_{2|T_PM^2}\}$ der Punkte, wo die Funktionen I_1, I_2 proportional sind. Dann ist die Menge invariant bezüglich projektiver Transformationen.*

Beweis von Lemma 1: Da die Metriken g und $\bar g$ geodätisch äquivalent sind, überführt die Umparametrisierung

$$
r : TM^2 \to TM^2, \quad r(\xi) := \frac{\sqrt{g(\xi,\xi)}}{\sqrt{\bar g(\xi,\xi)}}\xi
$$

die Trajektorien des geodätischen Flusses der Metrik g in die Trajektorien des geodätischen Flusses der Metrik $\bar g$. Also ist die Funktion

$$
\bar I\left(\frac{\sqrt{g(\xi,\xi)}}{\sqrt{\bar g(\xi,\xi)}}\xi\right) = \frac{g(\xi,\xi)}{\bar g(\xi,\xi)}\bar f(\xi,\xi)
$$

ein Integral des geodätischen Flusses der Metrik g. Weil die Energie-Funktion $g(\xi,\xi)$ und (nach Theorem 2) die Funktion $\bar g(\xi,\xi)\left(\frac{det(g)}{\det(\bar g)}\right)^{2/3}$ Integrale sind, ist die Funktion $I(\xi) := \bar I(\xi)\left(\frac{det(g)}{det(\bar g)}\right)^{\frac{2}{3}}$ auch ein Integral des geodätischen Flusses der Metrik g.

□

Wir werden noch das folgende Theorem von Dini brauchen:

Theorem 3 (Dini 1869 [2]). *Seien g und $\bar{g}$ geodätisch äquivalent auf M^2 und nichtproportional im Punkt $P \in M^2$. Dann gibt es ein Koordinatensytem (x, y) in einer Umgebung von P, so dass die Metriken die folgende Form haben:*

$$
\begin{aligned}
ds_g^2 &= (X(x) - Y(y))(dx^2 + dy^2) && (1)\\
ds_{\bar{g}^2} &= \left(\frac{1}{Y(y)} - \frac{1}{X(x)}\right)\left(\frac{dx^2}{X(x)} + \frac{dy^2}{Y(y)}\right), && (2)
\end{aligned}
$$

wobei die Funktion X (bzw. Y) nur von der Variablen x (bzw. y) abhängt.

Wir bemerken, dass die Funktionen X, Y positiv sind und invariant definiert werden können: Man betrachte den (1,1)-Tensor $G^i_j := \bar{g}^{i\alpha} g_{\alpha j}$ und definiere

$$A(P) := \text{ Der größere Eigenwert von } G \text{ im Punkt } P,$$

$$B(P) := \text{ Der kleinere Eigenwert von } G \text{ im Punkt } P.$$

Dann gilt:

$$X = \frac{A}{(AB)^{1/3}}, \quad Y = \frac{B}{(AB)^{1/3}}.$$

Die so definierten Funktionen X und Y sind wohldefiniert, positiv und stetig auf der ganzen Mannigfaltigkeit; in den Punkten, wo die Metriken nichtproportional sind, stimmen sie mit den Funktionen aus (1,2) überein und sind glatt. In den Punkten, wo die Metriken proportional sind, sind sie gleich.

Korollar 3. *Sei (M^2, g) eine vollständige, zusammenhängende 2-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ist die Metrik $\bar{g}$ geodätisch äquivalent zu g, so gilt für alle Punkte $P, Q \in M^2$:*

$$X(P) \geq Y(Q).$$

Korollar 4 (Eisenhart [3], Weyl [21, 22]). *Sei M^2 vollständig und zusammenhängend. Sind die Metriken $g, \bar{g}$ auf M^2 geodätisch und konform äquivalent, so sind sie homothetisch: $\bar{g} = Konst\, g$.*

Beweis: Sind die Metriken konform äquivalent, so ist $X(P) = Y(P)$ in allen Punkten $P \in M^2$. Sind sie außerdem geodätisch äquivalent, so sind die Funktionen X, Y nach Korollar 3 konstant, also sind die Metriken homothetisch: $\bar{g} = \text{Konst}\, g$.

□

Beweis für Korollar 3: Man betrachte $TM^2 \setminus (TM^2)_0$, wobei $(TM^2)_0$ der Null-Schnitt des Tangentialbündels TM^2 ist. Auf $TM^2 \setminus (TM^2)_0$ ist die Funkion $I(\xi)/E(\xi)$ wohldefiniert, wobei $I(\xi)$ das Integral aus Theorem 2 und $E(\xi)$ die

Energie-Funktion $g(\xi,\xi)$ ist. Man beachte, dass für alle $P \in M^2$ und für alle $\xi \in T_P M^2$ gilt:

$$Y(P) \leq I(\xi)/E(\xi) \leq X(P). \tag{3}$$

Denn wir können im Tangentialraum $T_P M^2$ Koordinaten so wählen, dass die Metriken g, $\bar g$ durch die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{X(P)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{Y(P)} \end{pmatrix}$$

gegeben sind. Für $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ ist die Funktion $I(\xi)/E(\xi)$:

$$\begin{aligned} \frac{I(\xi)}{E(\xi)} = \frac{Y(P)\xi_1^2 + X(P)\xi_2^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} &= X(P) - \frac{(X(P) - Y(P))\xi_1^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \\ &= Y(P) + \frac{(X(P) - Y(P))\xi_2^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2}. \end{aligned}$$

Da $\frac{X(P)-Y(P)}{\xi_1^2+\xi_2^2}$ nichtnegativ ist, gilt die Ungleichung (3).

Da (M^2, g) vollständig ist, gibt es für zwei beliebige Punkte $P, Q \in M^2$ eine Geodätische, die sie verbindet: $\gamma(0) = P$, $\gamma(1) = Q$. Da die Funktionen $I(\xi)$ und $E(\xi)$ Integrale sind, ist die Funktion $I(\xi)/E(\xi)$ auch ein Integral, also ist $I(\dot\gamma(0))/E(\dot\gamma(0)) = I(\dot\gamma(1))/E(\dot\gamma(1))$. Nach (3) gilt:

$$Y(P) \leq I(\dot\gamma(0))/E(\dot\gamma(0)) = I(\dot\gamma(1))/E(\dot\gamma(1)) \leq X(Q).$$

□

Das Integral $I(\xi)$ aus Theorem 2 für die Modell-Metriken aus Theorem 3 hat die Gestalt $I(\xi) = (X(x) - Y(y))(Y(y)\xi_1^2 + X(x)\xi_2^2)$, also haben Linearkombinationen des Integrals und der Energie-Funktion die Gestalt

$$(X(x) - Y(y))\big((-\alpha Y(y) + \beta)\xi_1^2 + (-\alpha X(x) + \beta)\xi_2^2\big). \tag{4}$$

Wir werden noch das folgende Resultat benutzen:

Theorem 4 (Kolokoltzov [7], Kiyohara [5, 6]) *Sei (M^2, g) eine zusammenhängende geschlossene 2-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ist die Dimension des Raums $\mathcal{I}(M^2, g)$ größer als zwei, so hat die Metrik g konstante Krümmung.*

Beweis von Theorem 1 fängt jetzt an: Sei (M^2, g) eine zusammenhängende geschlossene 2-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, auf der die Lie-Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ projektiv operiert. Sei F_t der Diffeomorphismus, mit dem das Element $t \in \mathbb{R}$ operiert.

Wir nehmen zuerst an, dass die Krümmung von g nicht konstant ist. Wir werden zeigen, dass alle F_t Homothetien sind. Wenn nicht, dann gibt es nach Korollar 4 eine Zahl $t_0 \in \mathbb{R}$, so dass es einen Punkt P gibt, wo die Metriken g und $g_{t_0} := F_{t_0}^* g$ nicht proportional sind. Sei I das Integral aus Theorem 2 für den geodätischen Fluss von g. Da die Metriken nichtproportional sind, sind I und die Energie-Funktion $E(\xi) := g(\xi, \xi)$ linear unabhängig, also bilden sie nach Theorem 4 eine Basis des Raums $\mathcal{I}(M^2, g)$.

Nach Theorem 3 gibt es ein Koordinatensystem (x, y) in einer Umgebung von P, so dass die Metriken g und g_{t_0} die Gestalt (1,2) haben.

Man betrachte das Vektorfeld $v = (v_1, v_2) := \left(\frac{d}{dt}F_t\right)_{|t=0}$. Das Vektorfeld v ist ein projektives Vektorfeld für g und für g_{t_0}. Nach Lemma 1 und Korollar 1 ist die Lie-Ableitung $\mathcal{L}_v g$ und $\mathcal{L}_v \bar{g}$ in dem Koordinatensystem (x, y) diagonal. Wir haben:

$$(\mathcal{L}_v g)_{ij} = -\sum_{k=1}^{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} v_k + g_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + g_{jk} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$$

Also, ist $-\mathcal{L}_v g =$

$$\begin{pmatrix} X'v_1 - Y'v_2 + 2(X-Y)\frac{\partial v_1}{\partial x} & (X-Y)(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x}) \\ (X-Y)(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x}) & X'v_1 - Y'v_2 + 2(X-Y)\frac{\partial v_2}{\partial y} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$\text{und} \quad -\mathcal{L}_v \bar{g} = \begin{pmatrix} \text{irgend etwas} & \frac{X-Y}{XY}(\frac{1}{X}\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{1}{Y}\frac{\partial v_2}{\partial x}) \\ \frac{X-Y}{XY}(\frac{1}{X}\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{1}{Y}\frac{\partial v_2}{\partial x}) & \text{irgend etwas} \end{pmatrix}$$

Da die Lie-Ableitungen $\mathcal{L}_v g$, $\mathcal{L}_v \bar{g}$ diagonal sind, sind die nichtdiagonalen Einträge $\frac{X-Y}{XY}\left(\frac{1}{X}\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{1}{Y}\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)$ und $(X-Y)(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x})$ Null, also ist

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0. \tag{6}$$

Nach Voraussetzung hat das Integral aus Korollar 1 die Form (4); das gibt uns das folgende System:

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}X'v_1 + \frac{1}{3}Y'v_2 + \frac{2}{3}(X-Y)\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{4}{3}(X-Y)\frac{\partial v_2}{\partial y} &= (X-Y)(\beta - \alpha Y) \\ -\frac{1}{3}X'v_1 + \frac{1}{3}Y'v_2 + \frac{2}{3}(X-Y)\frac{\partial v_2}{\partial y} - \frac{4}{3}(X-Y)\frac{\partial v_1}{\partial x} &= (X-Y)(\beta - \alpha X) \end{cases}$$

Unser nächstes Ziel ist zu zeigen, dass die Konstante α Null ist.

Die erste Gleichung minus die zweite gibt uns die Gleichung

$$2(X-Y)\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial v_2}{\partial y}\right) = (X-Y)(\alpha X - \alpha Y),$$

Da nach (6) die Funktion v_1 (bzw. v_2) nur von x (bzw. y) abhängt, gilt

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\alpha}{2}(X + \gamma), \quad \frac{\partial v_2}{\partial y} = \frac{\alpha}{2}(Y + \gamma) \tag{7}$$

für irgendeine Konstante γ. Die Substitution im System gibt uns die Gleichung

$$X'v_1 - Y'v_2 = \alpha(X^2 - Y^2) + (X-Y)(\alpha\gamma - 3\beta).$$

Deswegen gelten die folgenden Gleichungen für die Konstante $b := (\alpha\gamma - 3\beta)$ und für irgendeine Konstante c:

$$
\begin{aligned}
X'v_1 &= \alpha X^2 + bX + c & (8)\\
Y'v_2 &= \alpha Y^2 + bY + c & (9)
\end{aligned}
$$

Sei $O(P)$ der Orbit der Gruppe $(\mathbb{R}, +)$, der durch den Punkt P läuft. Nach Korollar 2, erhält $O(P)$ keinen Punkt, an dem g_{t_0} und g proportional sind. Dann sind X und Y entlang des ganzen Orbits glatt, und die Gleichungen (8,9) gelten. Dann sind die Konstanten α, b, c universal entlang des ganzen Orbits $O(P)$.

Sei t die Standard-Koordinate auf $\mathbb{R}$. Da die Funktion X (bzw. Y) nur von x (bzw. y) abhängt, ist $X'v_1 = \frac{d}{dt}X := \dot{X}$, $Y'v_2 = \frac{d}{dt}Y := \dot{Y}$. Wir bekommen die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
\dot{X} &= \alpha X^2 + bX + c\\
\dot{Y} &= \alpha Y^2 + bY + c
\end{aligned}
$$

Die Differentialgleichungen können für $\alpha \neq 0$ gelöst werden: die konstanten Lösungen sind $-\frac{b}{2\alpha} \pm \frac{\sqrt{b^2/4 - \alpha c}}{\alpha}$, und die nichtkonstanten Lösungen sind:

1. Für $D := b^2/4 - \alpha c < 0$, ist die Lösung die Funktion $-\frac{b}{2\alpha} + \frac{\sqrt{-D}}{\alpha}\tan(\sqrt{-D}(t + d_1))$.
2. Für $D := b^2/4 - \alpha c > 0$, ist die Lösung eine der Funktionen
   (a) $-\frac{b}{2\alpha} - \frac{\sqrt{D}}{\alpha}\tanh(\sqrt{D}(t + d_2))$,
   (b) $-\frac{b}{2\alpha} - \frac{\sqrt{D}}{\alpha}\coth(\sqrt{D}(t + d_3))$
3. Für $D := b^2/4 - \alpha c = 0$, ist die Lösung die Funktion $-\frac{b}{2\alpha} - \frac{1}{\alpha(t + d_4)}$.

Die Lösungen (1,2b,3) explodieren in endlicher Zeit. Das ist ein Widerspruch zu den Voraussetzungen: die Metriken g und $\bar{g} := g_{t_0}$ sind Riemannsch, deswegen sind die Eigenwerte von $\bar{g}^{i\alpha}g_{\alpha j}$ endlich.

Wenn die Funktionen $X(t)$ und $Y(t)$ die Gestalt (2a) haben, dann gibt es Punkte $Q_1, Q_2 \in O(P)$, so dass $X(Q_1) < Y(Q_2)$, was Korollar 3 widerspricht. Wenn die beiden Lösungen konstant sind, hat die Metrik konstante Krümmung.

Also hat eine Lösung die Gestalt (2a), und die zweite Lösung ist eine der konstanten Funktionen $-\frac{b}{2\alpha} \pm \frac{\sqrt{D}}{\alpha}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $X(t) = -\frac{b}{2\alpha} - \frac{\sqrt{D}}{\alpha}\tanh(\sqrt{D}\,t)$ ist, und dass $Y(t) = -\frac{b}{2\alpha} - \frac{\sqrt{D}}{\alpha}$ ist.

Da die Mannigfaltigkeit geschlossen ist, gilt $\gamma = Y = -\frac{b}{2\alpha} - \frac{\sqrt{D}}{\alpha}$, sonst ist v_2 unbeschränkt wegen (7). Dann ist die erste Gleichung aus (7) äquivalent zu

$$\dot{v}_1 = \left(\frac{\sqrt{D}}{2} - \frac{\sqrt{D}}{2}\tanh(\sqrt{D}\,t)\right)v_1.$$

Die Gleichung kann gelöst werden; die Lösung ist:

$$v_1(t) = \text{Konst} \cdot \sqrt{\frac{e^{\sqrt{D}\,t}}{\cosh(\sqrt{D}\,t)}}.$$

Also ist die Metrik g proportional zu

$$\left(1 - \tanh(\sqrt{D}\,t)\right) \left(\frac{e^{\sqrt{D}\,t}}{\cosh(\sqrt{D}\,t)} dt^2 + dy^2 \right),$$

und ihre Krümmung ist konstant.

Dann ist α Null, so dass die Lie-Ableitung $\mathcal{L}_v g$ proportional zu g ist. Also sind alle zurückgezogenen Metriken g_t proportional zu g. Dann operiert die Gruppe $\mathbb{R}$ mit Homothetien.

Da das Volumen von M^2 in den Metriken g und g_t gleich sein muss, operiert $(\mathbb{R}, +)$ isometrisch.

Sei jetzt die Krümmung von g konstant. Wenn sie negativ ist, folgt aus [12, 13, 15, 24], dass es keine Metrik $\bar{g}$ mit $\bar{g} \neq \text{Konst}\, g$ gibt, die zu g geodätisch äquivalent ist. Wenn die Krümmung Null ist, dann ist (M^2, g) entweder ein flacher Torus $\mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}^2}$ oder eine flache Kleinsche Flasche. Also induziert die Aktion auf (M^2, g) eine Aktion auf $\mathbb{R}^2$, die mit dem Gitter $\mathbb{Z}^2$ kommutiert. Die Gruppe der projektiven Transformationen von $\mathbb{R}^2$ wurde im wesentlichen schon in Beltrami [1] beschrieben: jede projektive Transformation ist die Verkettung einer linearen Transformation und einer Verschiebung. Also operiert die Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ auf $\mathbb{R}^2$ mit Verschiebungen. Also operiert sie auf (M^2, g) isometrisch.

$\square$

3 Die Vermutung von Lichnerowicz: Ankündigung

Die stärkere Version der Obata-Vermutung ist die Vermutung von Lichnerowicz:

Sei (M^n, g) vollständig, $n \geq 2$. Operiert die Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ auf (M^n, g) projektiv, so operiert sie affin.

Es ist bekannt [8], dass die Zusammenhangskomponente der Gruppe der affinen Transformationen einer geschlossenen Mannigfaltigkeit nur aus isometrien besteht; also folgt die Obata-Vermutung aus die Lichnerowicz-Vermutung.

Die Vermutung von Lichnerowicz wurde in [17] bewiesen unter den folgenden Annahmen:

- Die Dimension n ist größer als zwei.
- Die Mannigfaltigkeit, die Metrik und die Aktion der Gruppe sind reell-analytisch.

Beide Annahmen sind sehr wichtig für die Methoden von Solodovnikov, inbesondere die erste, da die Methoden von Solodovnikov auf der speziellen

Struktur des Krümmungstensors für geodätisch äquivalente Metriken basieren und in Dimension zwei nichtanwendbar sind.

Wir kündigen hier an, dass die Vermutung von Lichnerowicz in Dimension zwei richtig ist:

Theorem 5. *Sei (M^2, g) eine vollständige, zusammenhängende 2-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Operiert die Lie-Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ auf (M^2, g) mit projektiven Transformationen, so operiert sie isometrisch, oder die Metrik hat konstante nichtnegative Krümmung.*

Der Beweis gehört eher zur Theorie der quadratisch-integrablen geodätischen Flüsse und wird später veröffentlicht werden. Der entscheidende Schritt des Beweises ist die folgende Verallgemeinerung von Theorem 4:

Theorem 6. *Sei (M^2, g) eine vollständige, zusammenhängende 2-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei eine vollständige Riemannsche Metrik $\bar{g}$ mit $\bar{g} \neq \mathrm{Konst}\, g$ geodätisch äquivalent zu g. Ist die Dimension des Raums $\mathcal{I}(M^2, g)$ größer als zwei, so hat die Metrik g konstante nichtnegative Krümmung.*

References

[1] E. Beltrami, *Resoluzione del problema: riportari i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetische vengano rappresentante da linee rette*, Ann. Mat., **1**(1865), no. 7, 185–204.

[2] U. Dini, *Sopra un problema che si presenta nella theoria generale delle rappresentazioni geografice di una superficie su un'altra*, Ann. Mat., ser.2, **3**(1869), 269–293.

[3] L. P. Eisenhart, *Riemannian Geometry. 2d printing*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1949.

[4] I. Hasegawa, K. Yamauchi, *Infinitesimal projective transformations on tangent bundles with lift connections,* Sci. Math. Jpn. **57**(2003), no. 3, 469–483

[5] K. Kiyohara, *Compact Liouville surfaces*, J. Math. Soc. Japan **43**(1991), 555-591.

[6] K. Kiyohara, *Two Classes of Riemannian Manifolds Whose Geodesic Flows Are Integrable*, Memoirs of the AMS, Vol.**130**(1997), no. 619.

[7] V. N. Kolokol'tzov, *Polynomial integrals of geodesic flows on compact surfaces,* Dissertation, Moscow State University 1984.

[8] A. Lichnerowicz, *Geometry of groups of transformations,* Translated from the French and edited by Michael Cole. Noordhoff International Publishing, Leyden, 1977

[9] S. Lie, *Untersuchungen über geodätische Kurven,* Math. Ann. **20**(1882). Can be found in Sophus Lie Gesammelte Abhandlungen, Band 2, erster Teil, 267–374. Teubner, Leipzig 1935.

[10] V. S. Matveev, P. J. Topalov, *Trajectory equivalence and corresponding integrals*, Regular and Chaotic Dynamics, **3**(1998), no. 2, 30–45.

[11] V. S. Matveev, P. J. Topalov, *Geodesic equivalence of metrics on surfaces, and their integrability,* Dokl. Akad. Nauk **367**(1999), no. 6, 736–738.

[12] V. S. Matveev and P. J. Topalov, *Metric with ergodic geodesic flow is completely determined by unparameterized geodesics,* ERA-AMS, **6**(2000), 98–104.

[13] Vladimir S. Matveev, *Geschlossene hyperbolische 3-Mannigflatigkeiten sind geodätisch starr,* Manuscripta Math. 105 (2001), no. 3, 343–352.

[14] Vladimir S. Matveev, Petar J. Topalov, *Geodesic equivalence via integrability,* Geometriae Dedicata **96**(2003), 91–115.

[15] Vladimir S. Matveev, *Hyperbolic manifolds are geodesically rigid,* Invent. math. **151**(2003), 579–609.

[16] T. Nagano, T. Ochiai, *On compact Riemannian manifolds admitting essential projective transformations*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math. **33**(1986) 233–246.

[17] A. S. Solodovnikov, *Projective transformations of Riemannian spaces,* Uspehi Mat. Nauk (N.S.) **11**(1956), no. 4(70), 45–116.

[18] A. S. Solodovnikov, *The group of projective transformations in a complete analytic Riemannian space,* Dokl. Akad. Nauk SSSR **186**(1969) 1262–1265.

[19] P. J. Topalov and V. S. Matveev, *Geodesic equivalence and integrability*, Preprint series of Max-Planck-Institut f. Math. no. 74(**1998**).

[20] P. J. Topalov, *Commutative conservation laws for geodesic flows of metrics admitting projective symmetry*, Math. Research Letters **9**(2002) 65–72.

[21] H. Weyl, *Zur Infinitisimalgeometrie: Einordnung der projektiven und der konformen Auffassung,* Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse; "Selecta Hermann Weyl", Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1956.

[22] H. Weyl, *On the foundations of infinitesimal geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. **35**(1929) 716–725.

[23] K. Yamauchi, *On infinitesimal projective transformations satisfying the certain conditions,* Hokkaido Math. Journal **7**(1978) 74–77.

[24] K. Yamauchi, *A study of infinitesimal projective transformations of Riemannian manifolds,* Sci. Rep. Kagoshima Univ. No. 37(1988) 25–54.