Vladimir S. Matveev (Jena)

Geodätisch äquivalente Metriken und integrable Systeme.

Vladimir S. Matveev (Jena)

Geodätisch äquivalente Metriken und integrable Systeme.

Plan

Vladimir S. Matveev (Jena)

Geodätisch äquivalente Metriken
und integrable Systeme.

Plan

- Die Lösung der topologischen Version des Problems von Beltrami

Vladimir S. Matveev (Jena)

Geodätisch äquivalente Metriken
und integrable Systeme.

Plan

- Die Lösung der topologischen Version des Problems von Beltrami
  - Beweis in Dimension 2

Vladimir S. Matveev (Jena)

Geodätisch äquivalente Metriken
und integrable Systeme.

Plan

- Die Lösung der topologischen Version des Problems von Beltrami
  - Beweis in Dimension 2
  - Beweismethoden für beliebige Dimension

Vladimir S. Matveev (Jena)

Geodätisch äquivalente Metriken und integrable Systeme.

Plan

- Die Lösung der topologischen Version des Problems von Beltrami
  - Beweis in Dimension 2
  - Beweismethoden für beliebige Dimension
- Die Lösung der zwei Probleme von Lie und des Problems von Schouten

Vladimir S. Matveev (Jena)

Geodätisch äquivalente Metriken und integrable Systeme.

Plan

- Die Lösung der topologischen Version des Problems von Beltrami
  - Beweis in Dimension 2
  - Beweismethoden für beliebige Dimension
- Die Lösung der zwei Probleme von Lie und des Problems von Schouten
  - Computer-basierte Lösung des 2. Problems von Lie

Vladimir S. Matveev (Jena)

Geodätisch äquivalente Metriken und integrable Systeme.

Plan

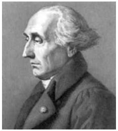
- Die Lösung der topologischen Version des Problems von Beltrami
  - Beweis in Dimension 2
  - Beweismethoden für beliebige Dimension
- Die Lösung der zwei Probleme von Lie und des Problems von Schouten
  - Computer-basierte Lösung des 2. Problems von Lie
- www.minet.uni-jena.de/~matveev/

Definition und klassische Beispiele

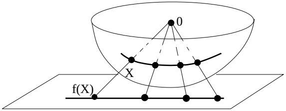
Def. Zwei Metriken g und $\bar{g}$ auf einer Mannigfaltigkeit M sind geodätisch äquivalent, falls sie gleiche (nichtparametrisierte) Geodäten haben.

Def. Zwei Metriken g und $\bar{g}$ auf einer Mannigfaltigkeit M sind geodätisch äquivalent, falls sie gleiche (nichtparametrisierte) Geodäten haben. (Bezeichnung: $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$)

Def. Zwei Metriken g und $\bar{g}$ auf einer Mannigfaltigkeit M sind geodätisch äquivalent, falls sie gleiche (nichtparametrisierte) Geodäten haben. (Bezeichnung: $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$)

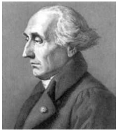


Lagrange 1789: Radiale Projektion $f : S^2_{\frac{1}{2}} \to \mathbb{R}^2$ bildet Geodäten der Halbsphäre (Großkreise) auf Geodäten der Ebene (Geraden) ab.

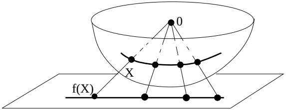


Definition und klassische Beispiele

Def. Zwei Metriken g und $\bar{g}$ auf einer Mannigfaltigkeit M sind geodätisch äquivalent, falls sie gleiche (nichtparametrisierte) Geodäten haben. (Bezeichnung: $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$)



Lagrange 1789: Radiale Projektion
$f : S^2_{\frac{1}{2}} \to \mathbb{R}^2$ bildet Geodäten
der Halbsphäre (Großkreise)
auf Geodäten der Ebene (Geraden) ab.

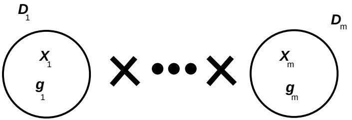


Beltrami 1865 hat das Beispiel von Lagrange verbessert:
Für jede Matrix $A \in SL(n+1)$ führt der Diffeomorphismus
$a : S^n \to S^n$, $a(x) := \frac{A(x)}{|A(x)|}$
die Geodäten in Geodäten über.

Beispiel von Levi-Civita

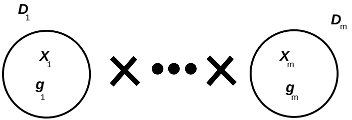
Beispiel von Levi-Civita

- $D_1, \ldots, D_m$ seien die Bälle



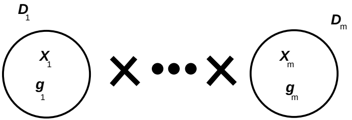
Beispiel von Levi-Civita

- $D_1, \dots, D_m$ seien die Bälle
- g_i sei eine Riemannsche Metrik auf D_i



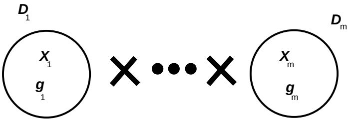
Beispiel von Levi-Civita

- $D_1, \ldots, D_m$ seien die Bälle
- g_i sei eine Riemannsche Metrik auf D_i
- $X_i : D_i \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ sodass



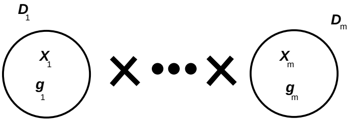
Beispiel von Levi-Civita

- $D_1, \ldots, D_m$ seien die Bälle
- g_i sei eine Riemannsche Metrik auf D_i
- $X_i : D_i \to \mathbb{R}_{>0}$ sodass
  - $\forall x_i \in D_i,\ x_j \in D_j \quad X_i(x_i) \neq X_j(x_j)$ $(i \neq j)$



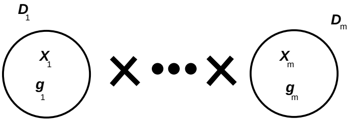
Beispiel von Levi-Civita

- $D_1, \ldots, D_m$ seien die Bälle
- g_i sei eine Riemannsche Metrik auf D_i
- $X_i : D_i \to \mathbb{R}_{>0}$ sodass
  - $\forall x_i \in D_i,\ x_j \in D_j \quad X_i(x_i) \neq X_j(x_j)$ $(i \neq j)$
  - $dim(D_i) \geq 2 \implies X_i = \mathrm{konst}_i$



Beispiel von Levi-Civita

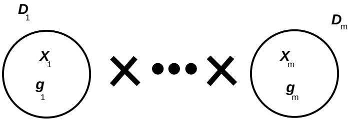
- $D_1, \dots, D_m$ seien die Bälle
- g_i sei eine Riemannsche Metrik auf D_i
- $X_i : D_i \to \mathbb{R}_{>0}$ sodass
  - $\forall x_i \in D_i,\ x_j \in D_j \quad X_i(x_i) \neq X_j(x_j)$ $(i \neq j)$
  - $dim(D_i) \geq 2 \implies X_i = \mathrm{konst}_i$



$g := \sum_i g_i$

Beispiel von Levi-Civita

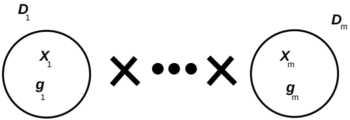
- $D_1, \ldots, D_m$ seien die Bälle
- g_i sei eine Riemannsche Metrik auf D_i
- $X_i : D_i \to \mathbb{R}_{>0}$ sodass
  - $\forall x_i \in D_i,\ x_j \in D_j \quad X_i(x_i) \neq X_j(x_j)$ $(i \neq j)$
  - $dim(D_i) \geq 2 \implies X_i = \mathrm{konst}_i$



$$g := \sum_i \underbrace{\prod_{j \neq i} |(X_i(x_i) - X_j(x_j))|}_{P_i} g_i$$

Beispiel von Levi-Civita

- $D_1, \ldots, D_m$ seien die Bälle
- g_i sei eine Riemannsche Metrik auf D_i
- $X_i : D_i \to \mathbb{R}_{>0}$ sodass
  - $\forall x_i \in D_i,\ x_j \in D_j \quad X_i(x_i) \neq X_j(x_j)$ $(i \neq j)$
  - $dim(D_i) \geq 2 \implies X_i = \mathrm{konst}_i$

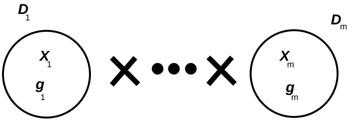


$$g := \sum_i \underbrace{\prod_{j\neq i} |(X_i(x_i) - X_j(x_j))|}_{P_i}\, g_i$$

$$\bar{g} := \sum_i \qquad\qquad g_i$$

Beispiel von Levi-Civita

- $D_1, \dots, D_m$ seien die Bälle
- g_i sei eine Riemannsche Metrik auf D_i
- $X_i : D_i \to \mathbb{R}_{>0}$ sodass
  - $\forall x_i \in D_i,\ x_j \in D_j \quad X_i(x_i) \neq X_j(x_j)$ $(i \neq j)$
  - $dim(D_i) \geq 2 \implies X_i = \mathrm{konst}_i$

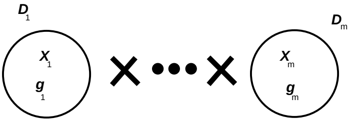


$$g := \sum_i \underbrace{\prod_{j \neq i} |(X_i(x_i) - X_j(x_j))|}_{P_i} g_i$$

$$\bar{g} := \sum_i \underbrace{\frac{1}{X_i} \prod_{\alpha} \frac{1}{X_\alpha}}_{\rho_i} \underbrace{\prod_{j \neq i} |(X_i - X_j)|}_{P_i} g_i$$

Beispiel von Levi-Civita

- $D_1, \ldots, D_m$ seien die Bälle
- g_i sei eine Riemannsche Metrik auf D_i
- $X_i : D_i \to \mathbb{R}_{>0}$ sodass
  - $\forall x_i \in D_i,\ x_j \in D_j \quad X_i(x_i) \neq X_j(x_j)$ $(i \neq j)$
  - $dim(D_i) \geq 2 \implies X_i = \mathrm{konst}_i$



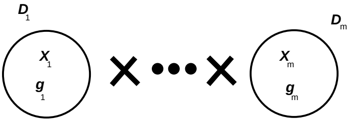
$$g := \sum_i \underbrace{\prod_{j\neq i} |(X_i(x_i) - X_j(x_j))|}_{P_i} g_i$$

$$\bar{g} := \sum_i \underbrace{\frac{1}{X_i} \prod_\alpha \frac{1}{X_\alpha}}_{\rho_i} \underbrace{\prod_{j\neq i} |(X_i - X_j)|}_{P_i} g_i$$

Levi-Civita  1896: Es gilt:

Beispiel von Levi-Civita

- $D_1, \ldots, D_m$ seien die Bälle
- g_i sei eine Riemannsche Metrik auf D_i
- $X_i : D_i \to \mathbb{R}_{>0}$ sodass
  - $\forall x_i \in D_i,\ x_j \in D_j \quad X_i(x_i) \neq X_j(x_j)$ $(i \neq j)$
  - $dim(D_i) \geq 2 \implies X_i = \mathrm{konst}_i$



$$g := \sum_i \underbrace{\prod_{j\neq i} |(X_i(x_i) - X_j(x_j))|}_{P_i}\, g_i$$

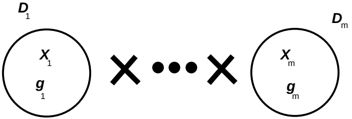
$$\bar{g} := \sum_i \underbrace{\frac{1}{X_i}\prod_{\alpha} \frac{1}{X_\alpha}}_{\rho_i}\, \underbrace{\prod_{j\neq i} |(X_i - X_j)|}_{P_i}\, g_i$$

Levi-Civita  1896: Es gilt:

- $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$

Beispiel von Levi-Civita

- $D_1, \ldots, D_m$ seien die Bälle
- g_i sei eine Riemannsche Metrik auf D_i
- $X_i : D_i \to \mathbb{R}_{>0}$ sodass
  - $\forall x_i \in D_i,\ x_j \in D_j \quad X_i(x_i) \neq X_j(x_j)$ $(i \neq j)$
  - $dim(D_i) \geq 2 \Longrightarrow X_i = \mathrm{konst}_i$



$$g := \sum_i \underbrace{\prod_{j \neq i} |(X_i(x_i) - X_j(x_j))|}_{P_i} g_i$$

$$\bar{g} := \sum_i \underbrace{\frac{1}{X_i} \prod_{\alpha} \frac{1}{X_\alpha}}_{\rho_i} \underbrace{\prod_{j \neq i} |(X_i - X_j)|}_{P_i} g_i$$

Levi-Civita  1896: Es gilt:

- $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$
- zwei geodätisch äquivalente Metriken kann man in der Umgebung fast jedes Punktes in diese Form bringen.

Wichtige Beobachtung:

$=$

Wichtige Beobachtung:

Die geodätisch äquivalenten Metriken g und $\bar{g}$ bestimmen die Daten (D_i, g_i, X_i).

$=$

Wichtige Beobachtung:

Die geodätisch äquivalenten Metriken g und $\bar{g}$ bestimmen die Daten (D_i, g_i, X_i). Tatsächlich, $(1,1)$-Tensor

$=$

Wichtige Beobachtung:

Die geodätisch äquivalenten Metriken g und $\bar{g}$ bestimmen die Daten $(D_i,\ g_i,\ X_i)$. Tatsächlich, $(1,1)$-Tensor $L := (\bar{g})^{-1} g \cdot \left(\frac{det(\bar{g})}{det(g)}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$=$

Wichtige Beobachtung:

Die geodätisch äquivalenten Metriken g und $\bar{g}$ bestimmen die Daten (D_i, g_i, X_i). Tatsächlich, $(1,1)$-Tensor $L := (\bar{g})^{-1} g \cdot \left(\frac{det(\bar{g})}{det(g)}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{\frac{1}{\rho_1 P_1}(g_1)^{-1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\frac{1}{\rho_m P_m}(g_m)^{-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{P_1 g_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{P_m g_m} \end{pmatrix}$$

$$=$$

Wichtige Beobachtung:

Die geodätisch äquivalenten Metriken g und $\bar{g}$ bestimmen die Daten $(D_i,\ g_i,\ X_i)$. Tatsächlich, $(1,1)$-Tensor $L := (\bar{g})^{-1}g \cdot \left(\frac{det(\bar{g})}{det(g)}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{\frac{1}{\rho_1 P_1}(g_1)^{-1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\frac{1}{\rho_m P_m}(g_m)^{-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{P_1 g_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{P_m g_m} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} X_1 & & \\ & \ddots & \\ & & X_1 \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} X_m & & \\ & \ddots & \\ & & X_m \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Wichtige Beobachtung:

Die geodätisch äquivalenten Metriken g und $\bar{g}$ bestimmen die Daten $(D_i,\, g_i,\, X_i)$. Tatsächlich, $(1,1)$-Tensor $L := (\bar{g})^{-1} g \cdot \left(\frac{det(\bar{g})}{det(g)}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{\frac{1}{\rho_1 P_1}\,(g_1)^{-1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\frac{1}{\rho_m P_m}\,(g_m)^{-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{P_1 g_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{P_m g_m} \end{pmatrix} \cdot \prod_\alpha \frac{1}{X_\alpha}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} X_1 & & \\ & \ddots & \\ & & X_1 \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} X_m & & \\ & \ddots & \\ & & X_m \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Wichtige Beobachtung:

Die geodätisch äquivalenten Metriken g und $\bar{g}$ bestimmen die Daten $(D_i,\ g_i,\ X_i)$. Tatsächlich, $(1,1)$-Tensor $L := (\bar{g})^{-1} g \cdot \left(\frac{det(\bar{g})}{det(g)}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{\frac{1}{\rho_1 P_1}(g_1)^{-1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\frac{1}{\rho_m P_m}(g_m)^{-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{P_1 g_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{P_m g_m} \end{pmatrix} \cdot \prod_\alpha \frac{1}{X_\alpha}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} X_1 & & \\ & \ddots & \\ & & X_1 \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} X_m & & \\ & \ddots & \\ & & X_m \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

- Distributionen der Eigenräume von L sind integrabel und generieren Blätterungen (fast überall)

Wichtige Beobachtung:

Die geodätisch äquivalenten Metriken g und $\bar{g}$ bestimmen die Daten $(D_i,\, g_i,\, X_i)$. Tatsächlich, $(1,1)$-Tensor $L := (\bar{g})^{-1} g \cdot \left(\frac{det(\bar{g})}{det(g)}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{\frac{1}{\rho_1 P_1}(g_1)^{-1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\frac{1}{\rho_m P_m}(g_m)^{-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{P_1 g_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{P_m g_m} \end{pmatrix} \cdot \prod_{\alpha} \frac{1}{X_\alpha}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} X_1 & & \\ & \ddots & \\ & & X_1 \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} X_m & & \\ & \ddots & \\ & & X_m \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

- Distributionen der Eigenräume von L sind integrabel und generieren Blätterungen (fast überall)
- die Blätter sind lokal D_i

Wichtige Beobachtung:

Die geodätisch äquivalenten Metriken g und $\bar{g}$ bestimmen die Daten $(D_i,\, g_i,\, X_i)$. Tatsächlich, $(1,1)$-Tensor $L := (\bar{g})^{-1} g \cdot \left(\frac{det(\bar{g})}{det(g)}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{\frac{1}{\rho_1 P_1}\,(g_1)^{-1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\frac{1}{\rho_m P_m}\,(g_m)^{-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{P_1 g_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{P_m g_m} \end{pmatrix} \cdot \prod_\alpha \frac{1}{X_\alpha}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} X_1 & & \\ & \ddots & \\ & & X_1 \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} X_m & & \\ & \ddots & \\ & & X_m \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

- Distributionen der Eigenräume von L sind integrabel und generieren Blätterungen (fast überall)
- die Blätter sind lokal D_i
- Die Funktionen X_i sind Eigenwerte von L

Fazit:

Fazit:

- $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ geben uns paarweise transversale (singuläre) Levi-Civita-Blätterungen $B_1, \ldots, B_m$ auf M s.d. $dim(B_1) + \cdots + dim(B_m) = dim(M)$

Fazit:

- $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ geben uns paarweise transversale (singuläre) Levi-Civita-Blätterungen $B_1, \ldots, B_m$ auf M s.d. $dim(B_1) + \cdots + dim(B_m) = dim(M)$
- Diese Blätterungen enthalten viel Informationen über geodätisch äquivalente Metriken.

Fazit:

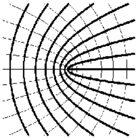
- $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ geben uns paarweise transversale (singuläre) Levi-Civita-Blätterungen $B_1, \ldots, B_m$ auf M s.d. $dim(B_1) + \cdots + dim(B_m) = dim(M)$
- Diese Blätterungen enthalten viel Informationen über geodätisch äquivalente Metriken.
- Falls $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ auf M gegeben sind, können wir neue Beispiele von geodätisch äquivalenten Metriken konstruieren:

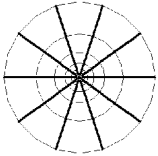
Fazit:

- $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ geben uns paarweise transversale (singuläre) Levi-Civita-Blätterungen $B_1, \ldots, B_m$ auf M s.d. $dim(B_1) + \cdots + dim(B_m) = dim(M)$
- Diese Blätterungen enthalten viel Informationen über geodätisch äquivalente Metriken.
- Falls $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ auf M gegeben sind, können wir neue Beispiele von geodätisch äquivalenten Metriken konstruieren: wir erhalten die Blätterungen und ändern X_i und g_i.

Fazit:

- $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ geben uns paarweise transversale (singuläre) Levi-Civita-Blätterungen $B_1, \ldots, B_m$ auf M s.d. $dim(B_1) + \cdots + dim(B_m) = dim(M)$
- Diese Blätterungen enthalten viel Informationen über geodätisch äquivalente Metriken.
- Falls $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ auf M gegeben sind, können wir neue Beispiele von geodätisch äquivalenten Metriken konstruieren: wir erhalten die Blätterungen und ändern X_i und g_i.





Mögliche Singularitäten der Blätterungen in Dim 2

Das Problem von Beltrami

Das Problem von Beltrami

Beltrami 1865: La seconda . . . generalizzazione ... del nostro problema, vale a dire: riportare i punti di una superficie sopra un' altra superficie in modo che alle linee geodetiche della prima corrispondano linee geodetiche della seconda.

Das Problem von Beltrami

Beltrami 1865: La seconda . . . generalizzazione ... del nostro problema, vale a dire: riportare i punti di una superficie sopra un' altra superficie in modo che alle linee geodetiche della prima corrispondano linee geodetiche della seconda.

Übersetzung: Man soll alle Paare von geodätisch äquivalenten Metriken beschreiben.

Antwort auf die topologische Version

Antwort auf die topologische Version

Satz (M∼ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$.*

Antwort auf die topologische Version

Satz (M$\sim$ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

Antwort auf die topologische Version

Satz (M$\sim$ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \stackrel{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*

Antwort auf die topologische Version

Satz (M$\sim$ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \stackrel{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*

  $M \stackrel{diffeo}{\approx} S^n/_G$, *sodass* $G \in O(n+1)$

Antwort auf die topologische Version

Satz (M$\sim$ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*

  $M \overset{diffeo}{\approx} S^n/_G$, *sodass* $G \in O(n+1)$ $\left\{ \vphantom{\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}} \right.$

Antwort auf die topologische Version

Satz (M$\sim$ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer* reduziblen *Raumform:*

  $M \overset{diffeo}{\approx} S^n/_G$, *sodass* $G \in O(n+1)$ $\Bigg\{$

Antwort auf die topologische Version

Satz (M$\sim$ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer* reduziblen *Raumform:*

  $M \overset{diffeo}{\approx} S^n/_G$, *sodass* $G \in O(n+1)$ $\begin{cases} \quad\quad ist\ diskret, \\ \\ \end{cases}$

Antwort auf die topologische Version

Satz (M$\sim$ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*

  $M \overset{diffeo}{\approx} S^n/_G$, *sodass* $G \in O(n+1)$ $\left\{ \begin{array}{l} \qquad\qquad ist\ diskret, \\ \\ \\ \end{array} \right.$

Antwort auf die topologische Version

Satz (M$\sim$ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*

  $$M \overset{diffeo}{\approx} S^n/_G, \text{ sodass } G \in O(n+1) \left\{ \begin{array}{l} \quad ist\ diskret, \\ \\ \end{array} \right.$$

Antwort auf die topologische Version

Satz (M$\sim$ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*

  $M \overset{diffeo}{\approx} S^n/_G$, *sodass* $G \in O(n+1)$ $\left\{ \begin{array}{l} \qquad\quad ist\ diskret, \\ \\ \\ \end{array} \right.$

Antwort auf die topologische Version

Satz (M∼ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*

  $$M \overset{diffeo}{\approx} S^n/_G, \text{ sodass } G \in O(n+1) \left\{ \begin{array}{c} \textit{ist diskret,} \\ \textit{operiert frei auf } S^n \\ \\ \end{array} \right.$$

Antwort auf die topologische Version

Satz (M$\sim$ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*

  $$M \overset{diffeo}{\approx} S^n/_G, \text{ sodass } G \in O(n+1) \begin{cases} \text{ist diskret,} \\ \text{operiert frei auf } S^n \\ \end{cases}$$

Antwort auf die topologische Version

Satz (M∼ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*

  $$M \overset{diffeo}{\approx} S^n/_G, \text{ sodass } G \in O(n+1) \begin{cases} \text{ist diskret,} \\ \text{operiert frei auf } S^n \\ \end{cases}$$

Antwort auf die topologische Version

Satz (M∼ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*

  $$M \overset{diffeo}{\approx} S^n/_G, \text{ sodass } G \in O(n+1) \begin{cases} ist\ diskret, \\ operiert\ frei\ auf\ S^n \\ = G_1 + G_2 \end{cases}$$

Antwort auf die topologische Version

Satz (M$\sim$ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq \mathit{konst} \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*

$$M \overset{\mathit{diffeo}}{\approx} S^n/_G, \text{ sodass } G \in O(n+1) \begin{cases} \textit{ist diskret}, \\ \textit{operiert frei auf } S^n \\ = G_1 + G_2 \end{cases}$$

oder

Antwort auf die topologische Version

Satz (M∼ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*
  $$M \overset{diffeo}{\approx} S^n/_{G}, \text{ sodass } G \in O(n+1) \left\{ \begin{array}{c} ist\ diskret, \\ operiert\ frei\ auf\ S^n \\ = G_1 + G_2 \end{array} \right.$$

oder

- *$\exists \hat{g}$ auf M, sodass die Holonomiegruppe reduzibel ist.*

Antwort auf die topologische Version

Satz (M$\sim$ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*

$$M \overset{diffeo}{\approx} S^n/_G, \text{ sodass } G \in O(n+1) \begin{cases} \text{ist diskret,} \\ \text{operiert frei auf } S^n \\ = G_1 + G_2 \end{cases}$$

oder

- *$\exists \hat{g}$ auf M, sodass die Holonomiegruppe reduzibel ist.*

Antwort auf die topologische Version

Satz (M$\sim$ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*
  $M \overset{diffeo}{\approx} S^n/_G$, *sodass* $G \in O(n+1)$ $\left\{ \begin{array}{c} ist\ diskret, \\ operiert\ frei\ auf\ S^n \\ = G_1 + G_2 \end{array} \right.$

oder

- *$\exists \hat{g}$ auf M, sodass die Holonomiegruppe reduzibel ist.*

Folgerung 1 (Topalov, M$\sim$ 2001): Jede geschlossene orientierte Fläche mit nichtproportionalen $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ ist (homöomorph zu) S^2 oder T^2.

Antwort auf die topologische Version

Satz (M$\sim$ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*

$$M \overset{diffeo}{\approx} S^n/_G, \text{ sodass } G \in O(n+1) \begin{cases} \text{ist diskret,} \\ \text{operiert frei auf } S^n \\ = G_1 + G_2 \end{cases}$$

oder

- *$\exists \hat{g}$ auf M, sodass die Holonomiegruppe reduzibel ist.*

Folgerung 1 (Topalov, M$\sim$ 2001): Jede geschlossene orientierte Fläche mit nichtproportionalen $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ ist (homöomorph zu) S^2 oder T^2.

Folgerung 2 (M$\sim$ 2003):

Antwort auf die topologische Version

Satz (M$\sim$ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*

$$M \overset{diffeo}{\approx} S^n/_G, \text{ sodass } G \in O(n+1) \begin{cases} ist\ diskret, \\ operiert\ frei\ auf\ S^n \\ = G_1 + G_2 \end{cases}$$

oder

- *$\exists \hat{g}$ auf M, sodass die Holonomiegruppe reduzibel ist.*

Folgerung 1 (Topalov, M$\sim$ 2001): Jede geschlossene orientierte Fläche mit nichtproportionalen $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ ist (homöomorph zu) S^2 oder T^2.

Folgerung 2 (M$\sim$ 2003): Jede geschlossene 3-Mannigfaltigkeit mit nichtproportionalen $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ ist $L_{p,q}$ oder Seifertmannigfaltigkeit mit Eulerzahl gleich 0.

Antwort auf die topologische Version

Satz (M$\sim$ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*

$$M \overset{diffeo}{\approx} S^n/_G, \text{ sodass } G \in O(n+1) \begin{cases} \text{ist diskret,} \\ \text{operiert frei auf } S^n \\ = G_1 + G_2 \end{cases}$$

oder

- *$\exists \hat{g}$ auf M, sodass die Holonomiegruppe reduzibel ist.*

Folgerung 1 (Topalov, M$\sim$ 2001): Jede geschlossene orientierte Fläche mit nichtproportionalen $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ ist (homöomorph zu) S^2 oder T^2.

Folgerung 2 (M$\sim$ 2003): Jede geschlossene 3-Mannigfaltigkeit mit nichtproportionalen $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ ist $L_{p,q}$ oder Seifertmannigfaltigkeit mit Eulerzahl gleich 0.

($L_{p,q}$ — reduzible Raumform,

Seifertmannigfaltigkeit mit Eulerzahl 0 erlauben Metriken mit reduzibler Holonomiegruppe .)

Gegeben sei $g, \ \bar{g}$ auf M^n

Integrable Systemen in Theorie von geod. äquiv. Metriken

Gegeben sei $g, \ \bar{g}$ auf M^n $\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$

Integrable Systemen in Theorie von geod. äquiv. Metriken

Gegeben sei $g, \ \bar{g}$ auf $M^n \xrightarrow{\text{man konstruiere}} L := \bar{g}^{-1} g$

Integrable Systemen in Theorie von geod. äquiv. Metriken

Gegeben sei $g, \ \bar{g}$ auf $M^n \ \xrightarrow{\text{man konstruiere}} L := \bar{g}^{-1} g \cdot \left(\frac{\det \bar{g}}{\det g}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

Integrable Systemen in Theorie von geod. äquiv. Metriken

Gegeben sei $g,\ \bar{g}$ auf M^n $\xrightarrow{\text{man konstruiere}} L := \bar{g}^{-1} g \cdot \left(\frac{\det \bar{g}}{\det g}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$\xrightarrow{\forall t \in \mathbb{R} \text{ man konstruiere}} S_t := (L - t \cdot \mathbf{Id})^{-1} \cdot det(L - t \cdot \mathbf{Id})$

Integrable Systemen in Theorie von geod. äquiv. Metriken

Gegeben sei $g, \ \bar{g}$ auf M^n $\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $L := \bar{g}^{-1} g \cdot \left(\frac{\det \bar{g}}{\det g} \right)^{\frac{1}{n+1}}$

$\xrightarrow{\forall t \in \mathbb{R} \text{ man konstruiere}}$ $S_t := (L - t \cdot \mathbf{Id})^{-1} \cdot det(L - t \cdot \mathbf{Id})$

$\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ I_t :

Integrable Systemen in Theorie von geod. äquiv. Metriken

Gegeben sei $g,\ \bar{g}$ auf M^n $\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $L := \bar{g}^{-1} g \cdot \left(\frac{\det \bar{g}}{\det g}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$\xrightarrow{\forall t \in \mathbb{R} \text{ man konstruiere}} S_t := (L - t \cdot \mathbf{Id})^{-1} \cdot det(L - t \cdot \mathbf{Id})$

$\xrightarrow{\text{man konstruiere}} I_t : TM^n \to \mathbb{R},$

Integrable Systemen in Theorie von geod. äquiv. Metriken

Gegeben sei $g,\ \bar{g}$ auf M^n $\xrightarrow{\text{man konstruiere}} L := \bar{g}^{-1}g \cdot \left(\frac{\det \bar{g}}{\det g}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$\xrightarrow{\forall t \in \mathbb{R} \text{ man konstruiere}} S_t := (L - t \cdot \mathbf{Id})^{-1} \cdot det(L - t \cdot \mathbf{Id})$

$\xrightarrow{\text{man konstruiere}} I_t : TM^n \to \mathbb{R}, I_t(\xi) := g(S_t(\xi), \xi).$

Integrable Systemen in Theorie von geod. äquiv. Metriken

Gegeben sei $g,\ \bar{g}$ auf M^n $\xrightarrow{\text{man konstruiere}} L := \bar{g}^{-1} g \cdot \left(\frac{\det \bar{g}}{\det g}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$\xrightarrow{\forall t \in \mathbb{R} \text{ man konstruiere}} S_t := (L - t \cdot \mathbf{Id})^{-1} \cdot det(L - t \cdot \mathbf{Id})$

$\xrightarrow{\text{man konstruiere}} I_t : TM^n \to \mathbb{R}, I_t(\xi) := g(S_t(\xi), \xi).$

Satz (Topalov, M$\sim$ 1998):

Ist $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$, so sind $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ die Funktionen I_{t_i} kommutierende Integrale für den geodätischen Fluss von g (d.h. für die Hamiltonsche Funktion $H(\xi) := g(\xi, \xi)$)

Integrable Systemen in Theorie von geod. äquiv. Metriken

Gegeben sei $g,\ \bar g$ auf M^n $\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $L := \bar g^{-1} g \cdot \left(\frac{\det \bar g}{\det g}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$\xrightarrow{\forall t \in \mathbb{R} \text{ man konstruiere}}$ $S_t := (L - t \cdot \mathbf{Id})^{-1} \cdot det(L - t \cdot \mathbf{Id})$

$\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $I_t : TM^n \to \mathbb{R}, I_t(\xi) := g(S_t(\xi), \xi)$.

Satz (Topalov, M$\sim$ 1998):

Ist $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar g$, so sind $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ die Funktionen I_{t_i} kommutierende Integrale für den geodätischen Fluss von g (d.h. für die Hamiltonsche Funktion $H(\xi) := g(\xi, \xi)$)

Eine Funktion $I : TM \to \mathbb{R}$ ist ein Integral für g,

Integrable Systemen in Theorie von geod. äquiv. Metriken

Gegeben sei g, $\bar{g}$ auf M^n $\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $L := \bar{g}^{-1} g \cdot \left(\frac{\det \bar{g}}{\det g}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$\xrightarrow{\forall t \in \mathbb{R} \text{ man konstruiere}}$ $S_t := (L - t \cdot \mathbf{Id})^{-1} \cdot det(L - t \cdot \mathbf{Id})$

$\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $I_t : TM^n \to \mathbb{R}, I_t(\xi) := g(S_t(\xi), \xi)$.

Satz (Topalov, M$\sim$ 1998):

Ist $g \stackrel{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$, so sind $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ die Funktionen I_{t_i} kommutierende Integrale für den geodätischen Fluss von g (d.h. für die Hamiltonsche Funktion $H(\xi) := g(\xi, \xi)$)

Eine Funktion $I : TM \to \mathbb{R}$ ist ein Integral für g, wenn für jede Geodäte $c : \mathbb{R} \to M$ gilt:

Integrable Systemen in Theorie von geod. äquiv. Metriken

Gegeben sei $g, \ \bar g$ auf M^n $\xrightarrow{\text{man konstruiere}} L := \bar g^{-1} g \cdot \left(\frac{\det \bar g}{\det g}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$\xrightarrow{\forall t \in \mathbb{R} \text{ man konstruiere}} S_t := (L - t\cdot \mathbf{Id})^{-1} \cdot det(L - t \cdot \mathbf{Id})$

$\xrightarrow{\text{man konstruiere}} I_t : TM^n \to \mathbb{R}, I_t(\xi) := g(S_t(\xi), \xi).$

Satz (Topalov, M$\sim$ 1998):

Ist $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar g$, so sind $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ die Funktionen I_{t_i} kommutierende Integrale für den geodätischen Fluss von g (d.h. für die Hamiltonsche Funktion $H(\xi) := g(\xi, \xi)$)

Eine Funktion $I : TM \to \mathbb{R}$ ist ein Integral für g, wenn für jede Geodäte $c : \mathbb{R} \to M$ gilt: die Funktion $I(c(t), c'(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist konstant.

Integrable Systemen in Theorie von geod. äquiv. Metriken

Gegeben sei $g, \ \bar g$ auf M^n $\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $L := \bar g^{-1} g \cdot \left(\frac{\det \bar g}{\det g}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

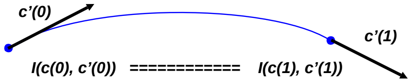
$\xrightarrow{\forall t \in \mathbb{R} \text{ man konstruiere}}$ $S_t := (L - t \cdot \mathbf{Id})^{-1} \cdot det(L - t \cdot \mathbf{Id})$

$\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $I_t : TM^n \to \mathbb{R}, I_t(\xi) := g(S_t(\xi), \xi).$

Satz (Topalov, M$\sim$ 1998):

Ist $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar g$, so sind $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ die Funktionen I_{t_i} kommutierende Integrale für den geodätischen Fluss von g (d.h. für die Hamiltonsche Funktion $H(\xi) := g(\xi, \xi)$)

Eine Funktion $I : TM \to \mathbb{R}$ ist ein Integral für g, wenn für jede Geodäte $c : \mathbb{R} \to M$ gilt: die Funktion $I(c(t), c'(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist konstant.



Beweis der Folgerung 1: Trick

Beweis der Folgerung 1: Trick

(Ist $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ auf einer geschlossenen Fläche M^2 vom Geschlecht ≥ 2, so ist $g = konst \cdot \bar{g}$)

Beweis der Folgerung 1: Trick

(Ist $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ *auf einer geschlossenen Fläche* M^2 *vom Geschlecht* ≥ 2*, so ist* $g = konst \cdot \bar{g}$*)*

In Dimension 2 ist das Integral I_0

Beweis der Folgerung 1: Trick

(Ist $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ auf einer geschlossenen Fläche M^2 vom Geschlecht ≥ 2, so ist $g = konst \cdot \bar{g}$)

In Dimension 2 ist das Integral I_0

$$I_0(\xi) := \left(\frac{\det(g)}{\det(\bar{g})} \right)^{\frac{2}{3}} \bar{g}(\xi, \xi).$$

Beweis der Folgerung 1: Trick

(Ist $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ auf einer geschlossenen Fläche M^2 vom Geschlecht ≥ 2, so ist $g = konst \cdot \bar{g}$)

In Dimension 2 ist das Integral I_0

$$I_0(\xi) := \left(\frac{\det(g)}{\det(\bar{g})}\right)^{\frac{2}{3}} \bar{g}(\xi, \xi).$$

Wegen der Eulercharakteristik gibt es ein x_0, sodass (nach Skalierung) $g_{|x_0} = \bar{g}_{|x_0}$.

Beweis der Folgerung 1: Trick

(Ist $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ auf einer geschlossenen Fläche M^2 vom Geschlecht ≥ 2, so ist $g = konst \cdot \bar{g}$)

In Dimension 2 ist das Integral I_0

$$I_0(\xi) := \left(\frac{\det(g)}{\det(\bar{g})}\right)^{\frac{2}{3}} \bar{g}(\xi, \xi).$$

Wegen der Eulercharakteristik gibt es ein x_0, sodass (nach Skalierung) $g_{|x_0} = \bar{g}_{|x_0}$. Wir nehmen $g_{|x_1} \neq \bar{g}_{|x_1}$ für ein x_1 an und erhalten einen Widerspruch.

Beweis für beliebige Dimension

Beweis für beliebige Dimension

- Man betrachtet die „Levi-Civita“ Blätterungen $B_1, \ldots, B_m$ und zeigt, dass die singulären Punkte in Untermannigfaltigkeiten von Codimension ≥ 2 angeordnet sind

Beweis für beliebige Dimension

- Man betrachtet die „Levi-Civita“ Blätterungen $B_1, \ldots, B_m$ und zeigt, dass die singulären Punkte in Untermannigfaltigkeiten von Codimension ≥ 2 angeordnet sind

  (Methoden: Trick und Analysis)

Beweis für beliebige Dimension

- Man betrachtet die „Levi-Civita“ Blätterungen $B_1, \ldots, B_m$ und zeigt, dass die singulären Punkte in Untermannigfaltigkeiten von Codimension ≥ 2 angeordnet sind

  (Methoden: Trick und Analysis)

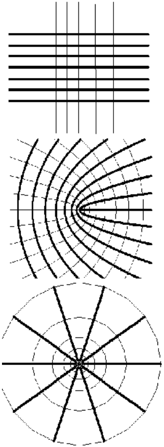
- Man beschreibe die Blätterung in der Nähe der singulären Punkte (bis auf blätterungserhaltende Homöomorphismen). Es gibt endlich viele „Bausteine“.

Beweis für beliebige Dimension

- Man betrachtet die „Levi-Civita“ Blätterungen $B_1, \dots, B_m$ und zeigt, dass die singulären Punkte in Untermannigfaltigkeiten von Codimension ≥ 2 angeordnet sind

  (Methoden: Trick und Analysis)

- Man beschreibe die Blätterung in der Nähe der singulären Punkte (bis auf blätterungserhaltende Homöomorphismen). Es gibt endlich viele „Bausteine“.



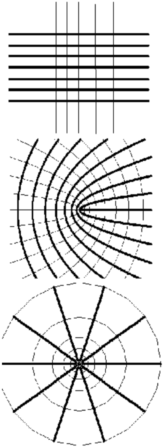
Beweis für beliebige Dimension

- Man betrachtet die „Levi-Civita“ Blätterungen $B_1, \ldots, B_m$ und zeigt, dass die singulären Punkte in Untermannigfaltigkeiten von Codimension ≥ 2 angeordnet sind

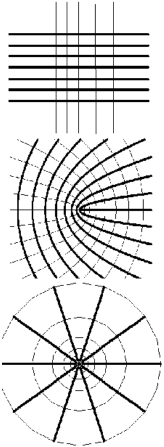
  (Methoden: Trick und Analysis)

- Man beschreibe die Blätterung in der Nähe der singulären Punkte (bis auf blätterungserhaltende Homöomorphismen). Es gibt endlich viele „Bausteine“.

  (Methoden: Trick, Analysis und Topologie)



Beweis für beliebige Dimension



- Man betrachtet die „Levi-Civita“ Blätterungen $B_1, \ldots, B_m$ und zeigt, dass die singulären Punkte in Untermannigfaltigkeiten von Codimension ≥ 2 angeordnet sind

  (Methoden: Trick und Analysis)

- Man beschreibe die Blätterung in der Nähe der singulären Punkte (bis auf blätterungserhaltende Homöomorphismen). Es gibt endlich viele „Bausteine“.

  (Methoden: Trick, Analysis und Topologie)

- Man klebt die „Bausteine“ zusammen.

  (Methoden: Differentialgeometrie)

Beweis für beliebige Dimension

- Man betrachtet die „Levi-Civita“ Blätterungen $B_1, \ldots, B_m$ und zeigt, dass die singulären Punkte in Untermannigfaltigkeiten von Codimension ≥ 2 angeordnet sind

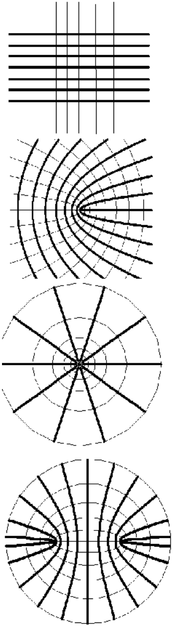
  (Methoden: Trick und Analysis)

- Man beschreibe die Blätterung in der Nähe der singulären Punkte (bis auf blätterungserhaltende Homöomorphismen). Es gibt endlich viele „Bausteine“.

  (Methoden: Trick, Analysis und Topologie)

- Man klebt die „Bausteine“ zusammen.

  (Methoden: Differentialgeometrie)



Die infinitesimale Version: das 2. Problem von Lie

Die infinitesimale Version: das 2. Problem von Lie

Lie 1882:

Die infinitesimale Version: das 2. Problem von Lie

Lie 1882:

Problem I: *Es wird verlangt, die Form des Bogenelementes einer jeden Fläche zu bestimmen, deren geodätische Kurven eine infinitesimale Transformation gestatten.*

Problem II: *Man soll die Form des Bogenelementes einer jeden Fläche bestimmen, deren geodätische Kurven mehrere infinitesimale Transformationen gestatten.*

Die infinitesimale Version: das 2. Problem von Lie

Lie 1882:

Problem I: *Es wird verlangt, die Form des Bogenelementes einer jeden Fläche zu bestimmen, deren geodätische Kurven eine infinitesimale Transformation gestatten.*

Problem II: *Man soll die Form des Bogenelementes einer jeden Fläche bestimmen, deren geodätische Kurven mehrere infinitesimale Transformationen gestatten.*

Def. Ein Vektorfeld auf einer (pseudo)riemannschen Mannigfaltigkeit ist projektiv, falls dessen Fluss die (nichtparametrisierten) Geodäten erhält.

Die infinitesimale Version: das 2. Problem von Lie

Lie 1882:

Problem I: *Es wird verlangt, die Form des Bogenelementes einer jeden Fläche zu bestimmen, deren geodätische Kurven eine infinitesimale Transformation gestatten.*

Problem II: *Man soll die Form des Bogenelementes einer jeden Fläche bestimmen, deren geodätische Kurven mehrere infinitesimale Transformationen gestatten.*

Def. Ein Vektorfeld auf einer (pseudo)riemannschen Mannigfaltigkeit ist projektiv, falls dessen Fluss die (nichtparametrisierten) Geodäten erhält.

Übersetzung: Man soll alle 2-dim Metriken beschreiben, die

Die infinitesimale Version: das 2. Problem von Lie

Lie 1882:

Problem I: *Es wird verlangt, die Form des Bogenelementes einer jeden Fläche zu bestimmen, deren geodätische Kurven eine infinitesimale Transformation gestatten.*

Problem II: *Man soll die Form des Bogenelementes einer jeden Fläche bestimmen, deren geodätische Kurven mehrere infinitesimale Transformationen gestatten.*

Def. Ein Vektorfeld auf einer (pseudo)riemannschen Mannigfaltigkeit ist projektiv, falls dessen Fluss die (nichtparametrisierten) Geodäten erhält.

Übersetzung: Man soll alle 2-dim Metriken beschreiben, die

- Problem I: ein projektives Vektorfeld

Die infinitesimale Version: das 2. Problem von Lie

Lie 1882:

Problem I: *Es wird verlangt, die Form des Bogenelementes einer jeden Fläche zu bestimmen, deren geodätische Kurven eine infinitesimale Transformation gestatten.*

Problem II: *Man soll die Form des Bogenelementes einer jeden Fläche bestimmen, deren geodätische Kurven mehrere infinitesimale Transformationen gestatten.*

Def. Ein Vektorfeld auf einer (pseudo)riemannschen Mannigfaltigkeit ist projektiv, falls dessen Fluss die (nichtparametrisierten) Geodäten erhält.

Übersetzung: Man soll alle 2-dim Metriken beschreiben, die

- Problem I: ein projektives Vektorfeld
- Problem II: mind. zwei linear unabhängige projektive Vektorfelder

gestatten.

Die infinitesimale Version: das 2. Problem von Lie

Lie 1882:

Problem I: *Es wird verlangt, die Form des Bogenelementes einer jeden Fläche zu bestimmen, deren geodätische Kurven eine infinitesimale Transformation gestatten.*
Problem II: *Man soll die Form des Bogenelementes einer jeden Fläche bestimmen, deren geodätische Kurven mehrere infinitesimale Transformationen gestatten.*

Def. Ein Vektorfeld auf einer (pseudo)riemannschen Mannigfaltigkeit ist projektiv, falls dessen Fluss die (nichtparametrisierten) Geodäten erhält.

Übersetzung: Man soll alle 2-dim Metriken beschreiben, die

- Problem I: ein projektives Vektorfeld
- Problem II: mind. zwei linear unabhängige projektive Vektorfelder

gestatten.

Bsp: Die (flache) Ebene und die (runde) Sphäre haben eine 8-dimensionale Lie-Algebra ($sl(3)$) von projektiven Vektorfeldern

Die infinitesimale Version: das 2. Problem von Lie

Lie 1882:

Problem I: *Es wird verlangt, die Form des Bogenelementes einer jeden Fläche zu bestimmen, deren geodätische Kurven eine infinitesimale Transformation gestatten.*

Problem II: *Man soll die Form des Bogenelementes einer jeden Fläche bestimmen, deren geodätische Kurven mehrere infinitesimale Transformationen gestatten.*

Def. Ein Vektorfeld auf einer (pseudo)riemannschen Mannigfaltigkeit ist projektiv, falls dessen Fluss die (nichtparametrisierten) Geodäten erhält.

Übersetzung: Man soll alle 2-dim Metriken beschreiben, die

- Problem I: ein projektives Vektorfeld
- Problem II: mind. zwei linear unabhängige projektive Vektorfelder

gestatten.

Bsp: Die (flache) Ebene und die (runde) Sphäre haben eine 8-dimensionale Lie-Algebra ($sl(3)$) von projektiven Vektorfeldern (Beispiel von Beltrami).

Satz (Bryant, Manno, M$\sim$) 2007:

Satz (Bryant, Manno, M$\sim$) 2007: *Hat eine Fläche* (M^2, g) *von nichtkonstanter Krümmung mind. 2 linear unabhängige projektive Vektorfelder, so gibt es Koordinaten in der Umgebung von fast jedem Punkt, sodass die Metrik* g *wie unten ist:*

Satz (Bryant, Manno, M$\sim$) 2007: *Hat eine Fläche (M^2, g) von nichtkonstanter Krümmung mind. 2 linear unabhängige projektive Vektorfelder, so gibt es Koordinaten in der Umgebung von fast jedem Punkt, sodass die Metrik g wie unten ist:*

1. Zwei projektive Vektorfelder:

   1.1 $\varepsilon_1 e^{(b+2)\,x}\, dx^2 + \varepsilon_2 e^{b\,x}\, dy^2$, wobei $b \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1\}$ und $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ Konstanten sind,

   1.2 $a\left(\frac{e^{(b+2)\,x} dx^2}{(e^{b\,x}+\varepsilon_2)^2} + \varepsilon_1 \frac{e^{b\,x} dy^2}{e^{b\,x}+\varepsilon_2}\right)$, wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1\}$, und $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ Konstanten sind, und

   1.3 $a\left(\frac{e^{2\,x} dx^2}{x^2} + \varepsilon \frac{dy^2}{x}\right)$, wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, und $\varepsilon \in \{1, -1\}$ Konstanten sind.

2. Drei projektive Vektorfelder:

   2.1 $\varepsilon_1 e^{3x} dx^2 + \varepsilon_2 e^{x} dy^2$, wobei $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ Konstanten sind,

   2.2 $a\left(\frac{e^{3x} dx^2}{(e^x+\varepsilon_2)^2} + \varepsilon_1 \frac{e^x dy^2}{(e^x+\varepsilon_2)}\right)$, wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ Konstanten sind, und

   2.3 $a\left(\frac{dx^2}{(cx+2x^2+\varepsilon_2)^2 x} + \varepsilon_1 \frac{x dy^2}{(cx+2x^2+\varepsilon_2)}\right)$, wobei $a > 0$, $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, $c \in \mathbb{R}$ Konstanten sind.

Beispiel zum 1. Problem von Lie: infinitesimale Homothetie

Beispiel zum 1. Problem von Lie: infinitesimale Homothetie

Def. Ein Vektorfeld heißt eine infinitesimale Homothetie, falls dessen Fluss die Metrik vervielfacht.

Beispiel zum 1. Problem von Lie: infinitesimale Homothetie

Def. Ein Vektorfeld heißt eine infinitesimale Homothetie, falls dessen Fluss die Metrik vervielfacht.

Bsp. Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial x} = (1, 0)$ ist eine infinitesimale Homothetie zur Metrik $e^{\lambda x}\left(E(y)dx^2 + F(y)dxdy + G(y)dy^2\right)$.

Beispiel zum 1. Problem von Lie: infinitesimale Homothetie

Def. Ein Vektorfeld heißt eine infinitesimale Homothetie, falls dessen Fluss die Metrik vervielfacht.

Bsp. Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial x} = (1, 0)$ ist eine infinitesimale Homothetie zur Metrik $e^{\lambda x}\left(E(y)dx^2 + F(y)dxdy + G(y)dy^2\right)$.

Jede infinitesimale Homothetie ist offensichtlich ein projektives Vektorfeld.

Satz (M$\sim$ 2008):

Satz (M$\sim$ 2008): *Eine Fläche* $(M^2, \bar g)$ *habe ein projektives Vektorfeld, aber keine infinitesimale Homothetie. Dann gibt es in der Umgebung von fast jedem Punkt Koordinaten* (x, y), *eine Metrik* g, *die zu* $\bar g$ *geodätisch äquivalent ist, und ein projektives Vektorfeld* v, *sodass*

Satz (M$\sim$ 2008): *Eine Fläche $(M^2, \bar{g})$ habe ein projektives Vektorfeld, aber keine infinitesimale Homothetie. Dann gibt es in der Umgebung von fast jedem Punkt Koordinaten (x, y), eine Metrik g, die zu $\bar{g}$ geodätisch äquivalent ist, und ein projektives Vektorfeld v, sodass*

1. $ds_g^2 = (X(x) - Y(y))(X_1(x)dx^2 + Y_1(y)dy^2), v = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$, sodass
   - 1.1 $X(x) = \frac{1}{x},\ \ Y(y) = \frac{1}{y},\ X_1(x) = C_1 \cdot \frac{e^{-3x}}{x},\ Y_1(y) = \frac{e^{-3y}}{y}$.
   - 1.2 $X(x) = \tan(x),\ Y(y) = \tan(y),\ X_1(x) = C_1 \cdot \frac{e^{-3\lambda x}}{\cos(x)}$, $Y_1(y) = \frac{e^{-3\lambda y}}{\cos(y)}$.
   - 1.3 $X(x) = C_1 \cdot e^{\nu x},\ Y(y) = e^{\nu y},\ X_1(x) = e^{2x},\ Y_1(y) = \pm e^{2y}$.
2. $ds_g^2 = (Y(y) + x)dxdy,\ v = v_1(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + v_2(y)\frac{\partial}{\partial y}$, sodass
   - 2.1 $Y = e^{\frac{3}{2y}} \cdot \frac{\sqrt{y}}{y-3} + \int_{y_0}^{y} e^{\frac{3}{2\xi}} \cdot \frac{\sqrt{\xi}}{(\xi-3)^2} d\xi$, $v_1 = \frac{y-3}{2}\left(x + \int_{y_0}^{y} e^{\frac{3}{2\xi}} \cdot \frac{\sqrt{\xi}}{(\xi-3)^2} d\xi\right),\ v_2 = y^2$.
   - 2.2 $Y = e^{-\frac{3}{2}\lambda \arctan(y)} \cdot \frac{\sqrt[4]{y^2+1}}{y-3\lambda} + \int_{y_0}^{y} e^{-\frac{3}{2}\arctan(\xi)} \cdot \frac{\sqrt[4]{\xi^2+1}}{(\xi-3\lambda)^2} d\xi$, $v_1 = \frac{y-3\lambda}{2}\left(x + \int_{y_0}^{y} e^{-\frac{3}{2}\lambda \arctan(\xi)} \cdot \frac{\sqrt[4]{\xi^2+1}}{(\xi-3\lambda)^2} d\xi\right),\ v_2 = y^2 + 1$.
   - 2.3 $Y(y) = y^{\nu},\ v_1(x, y) = \nu x,\ v_2 = y$.

Das Problem von Schouten und dessen Motivation

Das Problem von Schouten und dessen Motivation

Schouten  1924: *Man soll alle vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten beschreiben, deren kontinuierliche Gruppe von Geodäten-erhaltenden Transformationen grösser ist als die Gruppe der Isometrien*

Das Problem von Schouten und dessen Motivation

Schouten  1924: *Man soll alle vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten beschreiben, deren kontinuierliche Gruppe von Geodäten-erhaltenden Transformationen grösser ist als die Gruppe der Isometrien*

Klein  :**Erlanger Programm 1872**:

Das Problem von Schouten und dessen Motivation

Schouten  1924: *Man soll alle vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten beschreiben, deren kontinuierliche Gruppe von Geodäten-erhaltenden Transformationen grösser ist als die Gruppe der Isometrien*

Klein  :**Erlanger Programm 1872**: Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben; man soll die der Mannigfaltigkeit angehörigen Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften untersuchen, die durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden.

Lösung des Problems von Schouten

Lösung des Problems von Schouten

Ich habe (2005) die Vermutung von Lichnerowicz  **bewiesen:**

> *Jede vollständige einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren zusammenhängende Lie-Gruppe von Geodäten-erhaltenden Transformationen grösser ist als die Gruppe der affinen Transformationen, ist isometrisch zu einer runden Sphäre.*

Lösung des Problems von Schouten

Ich habe (2005) die Vermutung von Lichnerowicz  **bewiesen:**

Jede vollständige einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren zusammenhängende Lie-Gruppe von Geodäten-erhaltenden Transformationen grösser ist als die Gruppe der affinen Transformationen, ist isometrisch zu einer runden Sphäre.

Lösung des Problems von Schouten

Ich habe (2005) die Vermutung von Lichnerowicz  **bewiesen:**

Jede vollständige einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren zusammenhängende Lie-Gruppe von Geodäten-erhaltenden Transformationen grösser ist als die Gruppe der affinen Transformationen, ist isometrisch zu einer runden Sphäre.

Frankreich (Lichnerowicz)	

Lösung des Problems von Schouten

Ich habe (2005) die Vermutung von Lichnerowicz  **bewiesen:**

Jede vollständige einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren zusammenhängende Lie-Gruppe von Geodäten-erhaltenden Transformationen grösser ist als die Gruppe der affinen Transformationen, ist isometrisch zu einer runden Sphäre.

Frankreich (Lichnerowicz)	Japan (Yano, Obata, Tanno)	

Lösung des Problems von Schouten

Ich habe (2005) die Vermutung von Lichnerowicz  **bewiesen:**

Jede vollständige einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren zusammenhängende Lie-Gruppe von Geodäten-erhaltenden Transformationen grösser ist als die Gruppe der affinen Transformationen, ist isometrisch zu einer runden Sphäre.

Frankreich (Lichnerowicz)	Japan (Yano, Obata, Tanno)	Sowjetunion (Raschewskii)

Lösung des Problems von Schouten

Ich habe (2005) die Vermutung von Lichnerowicz  **bewiesen:**

Jede vollständige einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren zusammenhängende Lie-Gruppe von Geodäten-erhaltenden Transformationen grösser ist als die Gruppe der affinen Transformationen, ist isometrisch zu einer runden Sphäre.

Frankreich (Lichnerowicz)	Japan (Yano, Obata, Tanno)	Sowjetunion (Raschewskii)
Couty (1961) hat die Vermutung unter der Annahme bewiesen, dass g Einstein oder Kähler ist.		

Lösung des Problems von Schouten

Ich habe (2005) die Vermutung von Lichnerowicz  **bewiesen:**

Jede vollständige einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren zusammenhängende Lie-Gruppe von Geodäten-erhaltenden Transformationen grösser ist als die Gruppe der affinen Transformationen, ist isometrisch zu einer runden Sphäre.

Frankreich (Lichnerowicz)	Japan (Yano, Obata, Tanno)	Sowjetunion (Raschewskii)
Couty (1961) hat die Vermutung unter der Annahme bewiesen, dass g Einstein oder Kähler ist.	Yamauchi (1974) hat die Vermutung unter der Annahme bewiesen, dass die Skalarkrümmung konstant ist.	

Lösung des Problems von Schouten

Ich habe (2005) die Vermutung von Lichnerowicz  **bewiesen:**

Jede vollständige einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren zusammenhängende Lie-Gruppe von Geodäten-erhaltenden Transformationen grösser ist als die Gruppe der affinen Transformationen, ist isometrisch zu einer runden Sphäre.

Frankreich (Lichnerowicz)	Japan (Yano, Obata, Tanno)	Sowjetunion (Raschewskii)
Couty (1961) hat die Vermutung unter der Annahme bewiesen, dass g Einstein oder Kähler ist.	Yamauchi (1974) hat die Vermutung unter der Annahme bewiesen, dass die Skalarkrümmung konstant ist.	Solodovnikov (1956) hat die Vermutung unter den Annahmen bewiesen, dass

Lösung des Problems von Schouten

Ich habe (2005) die Vermutung von Lichnerowicz  **bewiesen:**

Jede vollständige einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren zusammenhängende Lie-Gruppe von Geodäten-erhaltenden Transformationen grösser ist als die Gruppe der affinen Transformationen, ist isometrisch zu einer runden Sphäre.

Frankreich (Lichnerowicz)	Japan (Yano, Obata, Tanno)	Sowjetunion (Raschewskii)
Couty (1961) hat die Vermutung unter der Annahme bewiesen, dass g Einstein oder Kähler ist.	Yamauchi (1974) hat die Vermutung unter der Annahme bewiesen, dass die Skalarkrümmung konstant ist.	Solodovnikov (1956) hat die Vermutung unter den Annahmen bewiesen, dass ▶ alles reell-analytisch ist,

Lösung des Problems von Schouten

Ich habe (2005) die Vermutung von Lichnerowicz  **bewiesen:**

Jede vollständige einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren zusammenhängende Lie-Gruppe von Geodäten-erhaltenden Transformationen grösser ist als die Gruppe der affinen Transformationen, ist isometrisch zu einer runden Sphäre.

Frankreich (Lichnerowicz)	Japan (Yano, Obata, Tanno)	Sowjetunion (Raschewskii)
Couty (1961) hat die Vermutung unter der Annahme bewiesen, dass g Einstein oder Kähler ist.	Yamauchi (1974) hat die Vermutung unter der Annahme bewiesen, dass die Skalarkrümmung konstant ist.	Solodovnikov (1956) hat die Vermutung unter den Annahmen bewiesen, dass • alles reell-analytisch ist, • und $n \geq 3$.

Plan der Lösung der Probleme von Lie und des Problems von Schouten

Plan der Lösung der Probleme von Lie und des Problems von Schouten

- Als System von PDE umschreiben.

Plan der Lösung der Probleme von Lie und des Problems von Schouten

- Als System von PDE umschreiben.
  - Wir erklären dies für das 2. Problem von Lie

Plan der Lösung der Probleme von Lie und des Problems von Schouten

- Als System von PDE umschreiben.
  - Wir erklären dies für das 2. Problem von Lie
- Das System von PDE analysieren.

Plan der Lösung der Probleme von Lie und des Problems von Schouten

- Als System von PDE umschreiben.
  - Wir erklären dies für das 2. Problem von Lie
- Das System von PDE analysieren.
  - Lokale Analyse für Probleme von Lie

Plan der Lösung der Probleme von Lie und des Problems von Schouten

- Als System von PDE umschreiben.
  - Wir erklären dies für das 2. Problem von Lie
- Das System von PDE analysieren.
  - Lokale Analyse für Probleme von Lie (Wir erklären einen naiven Zugang für das 2. Problem von Lie)

Plan der Lösung der Probleme von Lie und des Problems von Schouten

- Als System von PDE umschreiben.
  - Wir erklären dies für das 2. Problem von Lie
- Das System von PDE analysieren.
  - Lokale Analyse für Probleme von Lie (Wir erklären einen naiven Zugang für das 2. Problem von Lie)
  - Globale

Analyse für Problem von Schouten

Plan der Lösung der Probleme von Lie und des Problems von Schouten

- Als System von PDE umschreiben.
  - Wir erklären dies für das 2. Problem von Lie
- Das System von PDE analysieren.
  - Lokale Analyse für Probleme von Lie (Wir erklären einen naiven Zugang für das 2. Problem von Lie)
  - Globale (wenn die Mannigfaltigkeit geschlossen oder vollständig ist) Analyse für Problem von Schouten

Lösung des 2. Problem von Lie: Vorarbeit

Lösung des 2. Problem von Lie: Vorarbeit

Def: *Projektiver Zusammenhang eines affinen Zusammenhangs* $\Gamma = \Gamma^i_{jk}(x, y)$ *ist*

$$\begin{aligned} y_{xx} &= \underbrace{-\Gamma^2_{11}}_{K_0(x,y)} + \underbrace{\left(\Gamma^1_{11} - 2\Gamma^2_{12}\right)}_{K_1(x,y)} y_x \\ &+ \underbrace{\left(-\Gamma^2_{22} + 2\Gamma^1_{12}\right)}_{K_2(x,y)} (y_x)^2 + \underbrace{\Gamma^1_{22}}_{K_3(x,y)} (y_x)^3 \end{aligned}$$

Lösung des 2. Problem von Lie: Vorarbeit

Def: *Projektiver Zusammenhang eines affinen Zusammenhangs* $\Gamma = \Gamma^i_{jk}(x,y)$ *ist*

$$\begin{aligned} y_{xx} &= \underbrace{-\Gamma^2_{11}}_{K_0(x,y)} + \underbrace{\left(\Gamma^1_{11} - 2\Gamma^2_{12}\right)}_{K_1(x,y)} y_x \\ &+ \underbrace{\left(-\Gamma^2_{22} + 2\Gamma^1_{12}\right)}_{K_2(x,y)} (y_x)^2 + \underbrace{\Gamma^1_{22}}_{K_3(x,y)} (y_x)^3 \end{aligned}$$

Beltrami 1865: Projektiver Zusammenhang enthält alle Information über nichtparametrisierte Geodäten:

Lösung des 2. Problem von Lie: Vorarbeit

Def: *Projektiver Zusammenhang eines affinen Zusammenhangs* $\Gamma = \Gamma^i_{jk}(x,y)$ *ist*

$$\begin{aligned} y_{xx} &= \underbrace{-\Gamma^2_{11}}_{K_0(x,y)} + \underbrace{(\Gamma^1_{11} - 2\Gamma^2_{12})}_{K_1(x,y)} y_x \\ &+ \underbrace{(-\Gamma^2_{22} + 2\Gamma^1_{12})}_{K_2(x,y)} (y_x)^2 + \underbrace{\Gamma^1_{22}}_{K_3(x,y)} (y_x)^3 \end{aligned}$$

Beltrami 1865: Projektiver Zusammenhang enthält alle Information über nichtparametrisierte Geodäten: Für jede Lösung $y(x)$ ist die Kurve $c(t) = (t, y(t))$ eine umparametrisierte Geodäte.

Lösung des 2. Problem von Lie: Vorarbeit

Def: *Projektiver Zusammenhang eines affinen Zusammenhangs* $\Gamma = \Gamma^i_{jk}(x,y)$ *ist*

$$\begin{aligned} y_{xx} &= \underbrace{-\Gamma^2_{11}}_{K_0(x,y)} + \underbrace{(\Gamma^1_{11} - 2\Gamma^2_{12})}_{K_1(x,y)} y_x \\ &+ \underbrace{(-\Gamma^2_{22} + 2\Gamma^1_{12})}_{K_2(x,y)}(y_x)^2 + \underbrace{\Gamma^1_{22}}_{K_3(x,y)} (y_x)^3 \end{aligned}$$

Beltrami 1865: Projektiver Zusammenhang enthält alle Information über nichtparametrisierte Geodäten: Für jede Lösung $y(x)$ ist die Kurve $c(t) = (t, y(t))$ eine umparametrisierte Geodäte.
Folgerung Hat g zwei projektive Vektorfelder, so hat der projektive Zusammenhang zwei infinitesimale Symmetrien.

Lösung des 2. Problem von Lie: Vorarbeit

Def: *Projektiver Zusammenhang eines affinen Zusammenhangs* $\Gamma = \Gamma^i_{jk}(x,y)$ *ist*

$$\begin{aligned} y_{xx} &= \underbrace{-\Gamma^2_{11}}_{K_0(x,y)} + \underbrace{\left(\Gamma^1_{11} - 2\Gamma^2_{12}\right)}_{K_1(x,y)} y_x \\ &+ \underbrace{\left(-\Gamma^2_{22} + 2\Gamma^1_{12}\right)}_{K_2(x,y)} (y_x)^2 + \underbrace{\Gamma^1_{22}}_{K_3(x,y)} (y_x)^3 \end{aligned}$$

Beltrami 1865: Projektiver Zusammenhang enthält alle Information über nichtparametrisierte Geodäten: Für jede Lösung $y(x)$ ist die Kurve $c(t) = (t, y(t))$ eine umparametrisierte Geodäte.

Folgerung Hat g zwei projektive Vektorfelder, so hat der projektive Zusammenhang zwei infinitesimale Symmetrien.

Lösung des 2. Problem von Lie: Vorarbeit

Def: *Projektiver Zusammenhang eines affinen Zusammenhangs* $\Gamma = \Gamma^i_{jk}(x, y)$ *ist*

$$\begin{aligned} y_{xx} &= \underbrace{-\Gamma^2_{11}}_{K_0(x,y)} + \underbrace{(\Gamma^1_{11} - 2\Gamma^2_{12})}_{K_1(x,y)} y_x \\ &+ \underbrace{(-\Gamma^2_{22} + 2\Gamma^1_{12})}_{K_2(x,y)} (y_x)^2 + \underbrace{\Gamma^1_{22}}_{K_3(x,y)} (y_x)^3 \end{aligned}$$

Beltrami 1865: Projektiver Zusammenhang enthält alle Information über nichtparametrisierte Geodäten: Für jede Lösung $y(x)$ ist die Kurve $c(t) = (t, y(t))$ eine umparametrisierte Geodäte.

Folgerung Hat g zwei projektive Vektorfelder, so hat der projektive Zusammenhang zwei infinitesimale Symmetrien.

Es ist einfach, solche projektiven Zusammenhänge zu beschreiben (Lie, Cartan, Tresse):

Lösung des 2. Problem von Lie: Vorarbeit

Def: *Projektiver Zusammenhang eines affinen Zusammenhangs* $\Gamma = \Gamma^i_{jk}(x, y)$ *ist*

$$\begin{aligned} y_{xx} &= \underbrace{-\Gamma^2_{11}}_{K_0(x,y)} + \underbrace{(\Gamma^1_{11} - 2\Gamma^2_{12})}_{K_1(x,y)} y_x \\ &+ \underbrace{(-\Gamma^2_{22} + 2\Gamma^1_{12})}_{K_2(x,y)}(y_x)^2 + \underbrace{\Gamma^1_{22}}_{K_3(x,y)} (y_x)^3 \end{aligned}$$

Beltrami 1865: Projektiver Zusammenhang enthält alle Information über nichtparametrisierte Geodäten: Für jede Lösung $y(x)$ ist die Kurve $c(t) = (t, y(t))$ eine umparametrisierte Geodäte.

Folgerung Hat g zwei projektive Vektorfelder, so hat der projektive Zusammenhang zwei infinitesimale Symmetrien.

Es ist einfach, solche projektiven Zusammenhänge zu beschreiben (Lie, Cartan, Tresse):

in einem Koordinatensystem sind sie wie folgt ($A, B, C, D \in \mathbb{R}$):

$y_{xx} = e^x A + By_x + Ce^{-x}(y_x)^2 + De^{-2x}(y_x)^3$.

Lösung des 2. Problem von Lie: Vorarbeit

Def: *Projektiver Zusammenhang eines affinen Zusammenhangs* $\Gamma = \Gamma^i_{jk}(x,y)$ *ist*

$$\begin{aligned} y_{xx} &= \underbrace{-\Gamma^2_{11}}_{K_0(x,y)} + \underbrace{(\Gamma^1_{11} - 2\Gamma^2_{12})}_{K_1(x,y)} y_x \\ &+ \underbrace{(-\Gamma^2_{22} + 2\Gamma^1_{12})}_{K_2(x,y)} (y_x)^2 + \underbrace{\Gamma^1_{22}}_{K_3(x,y)} (y_x)^3 \end{aligned}$$

Beltrami 1865: Projektiver Zusammenhang enthält alle Information über nichtparametrisierte Geodäten: Für jede Lösung $y(x)$ ist die Kurve $c(t) = (t, y(t))$ eine umparametrisierte Geodäte.
Folgerung Hat g zwei projektive Vektorfelder, so hat der projektive Zusammenhang zwei infinitesimale Symmetrien.
Es ist einfach, solche projektiven Zusammenhänge zu beschreiben (Lie, Cartan, Tresse):
in einem Koordinatensystem sind sie wie folgt ($A, B, C, D \in \mathbb{R}$):
$y_{xx} = e^x A + B y_x + C e^{-x} (y_x)^2 + D e^{-2x} (y_x)^3$.
2. Problem von Lie: "Welche davon sind metrisch?"

Satz (Liouville 1889 – Eastwood/ M$\sim$ 2007– Bryant/Manno/M$\sim$ 2007)

Satz (Liouville 1889 – Eastwood/ M$\sim$ 2007– Bryant/Manno/M$\sim$ 2007) *Eine Metrik g hat genau dann den projektiven Zusammenhang*

$$y_{xx} = K_0 + K_1 y_x + K_2 (y_x)^2 + K_3 (y_x)^3$$

Satz (Liouville 1889 – Eastwood/ M$\sim$ 2007– Bryant/Manno/M$\sim$ 2007) *Eine Metrik g hat genau dann den projektiven Zusammenhang*

$$y_{xx} = K_0 + K_1 y_x + K_2 (y_x)^2 + K_3 (y_x)^3$$

wenn die Einträge der Matrix $a \stackrel{\text{def}}{=} (det(g))^{-2/3} g$ die Lösungen des folgenden PDE-Systems sind.

Satz (Liouville 1889 – Eastwood/ M$\sim$ 2007– Bryant/Manno/M$\sim$ 2007) *Eine Metrik g hat genau dann den projektiven Zusammenhang*

$$y_{xx} = K_0 + K_1 y_x + K_2 (y_x)^2 + K_3 (y_x)^3$$

wenn die Einträge der Matrix $a \stackrel{\text{def}}{=} (det(g))^{-2/3} g$ die Lösungen des folgenden PDE-Systems sind.

$$(*) \begin{cases} \frac{\partial a_{11}}{\partial x} + 2\, K_0 a_{12} - 2/3\, K_1 a_{11} & = & 0 \\ 2\, \frac{\partial a_{12}}{\partial x} + \frac{\partial a_{11}}{\partial y} + 2\, K_0 a_{22} + 2/3\, K_1 a_{12} - 4/3\, K_2 a_{11} & = & 0 \\ \frac{\partial a_{22}}{\partial x} + 2\, \frac{\partial a_{12}}{\partial y} + 4/3\, K_1 a_{22} - 2/3\, K_2 a_{12} - 2\, K_3 a_{11} & = & 0 \\ \frac{\partial a_{22}}{\partial y} + 2/3\, K_2 a_{22} - 2\, K_3 a_{12} & = & 0 \end{cases}$$

Satz (Liouville 1889 – Eastwood/ M$\sim$ 2007– Bryant/Manno/M$\sim$ 2007) *Eine Metrik g hat genau dann den projektiven Zusammenhang*

$$y_{xx} = K_0 + K_1 y_x + K_2 (y_x)^2 + K_3 (y_x)^3$$

wenn die Einträge der Matrix $a \stackrel{\mathrm{def}}{=} (det(g))^{-2/3} g$ die Lösungen des folgenden PDE-Systems sind.

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial a_{11}}{\partial x} + 2\, K_0 a_{12} - 2/3\, K_1 a_{11} & = & 0 \\ 2\,\frac{\partial a_{12}}{\partial x} + \frac{\partial a_{11}}{\partial y} + 2\, K_0 a_{22} + 2/3\, K_1 a_{12} - 4/3\, K_2 a_{11} & = & 0 \\ \frac{\partial a_{22}}{\partial x} + 2\,\frac{\partial a_{12}}{\partial y} + 4/3\, K_1 a_{22} - 2/3\, K_2 a_{12} - 2\, K_3 a_{11} & = & 0 \\ \frac{\partial a_{22}}{\partial y} + 2/3\, K_2 a_{22} - 2\, K_3 a_{12} & = & 0 \end{array} \right.$$

Also, der projektive Zusammenhang ist metrisch $\Longleftrightarrow$ das System $(*)$ hat eine nichttriviale Lösung.

Satz (Liouville 1889 – Eastwood/ M$\sim$ 2007– Bryant/Manno/M$\sim$ 2007) *Eine Metrik g hat genau dann den projektiven Zusammenhang*

$$y_{xx} = K_0 + K_1 y_x + K_2 (y_x)^2 + K_3 (y_x)^3$$

wenn die Einträge der Matrix $a \stackrel{\text{def}}{=} (det(g))^{-2/3} g$ die Lösungen des folgenden PDE-Systems sind.

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial a_{11}}{\partial x} + 2\, K_0 a_{12} - 2/3\, K_1 a_{11} & = & 0 \\ 2\, \frac{\partial a_{12}}{\partial x} + \frac{\partial a_{11}}{\partial y} + 2\, K_0 a_{22} + 2/3\, K_1 a_{12} - 4/3\, K_2 a_{11} & = & 0 \\ \frac{\partial a_{22}}{\partial x} + 2\, \frac{\partial a_{12}}{\partial y} + 4/3\, K_1 a_{22} - 2/3\, K_2 a_{12} - 2\, K_3 a_{11} & = & 0 \\ \frac{\partial a_{22}}{\partial y} + 2/3\, K_2 a_{22} - 2\, K_3 a_{12} & = & 0 \end{array} \right.$$

Also, der projektive Zusammenhang ist metrisch $\Longleftrightarrow$ das System $(*)$ hat eine nichttriviale Lösung.

Um 2. Problem von Lie zu lösen, muss man alle Konstanten A, B, C, D **finden,**

Satz (Liouville 1889 – Eastwood/ M∼ 2007– Bryant/Manno/M∼ 2007) *Eine Metrik g hat genau dann den projektiven Zusammenhang*

$$y_{xx} = K_0 + K_1 y_x + K_2 (y_x)^2 + K_3 (y_x)^3$$

wenn die Einträge der Matrix $a \stackrel{\text{def}}{=} (\det(g))^{-2/3} g$ die Lösungen des folgenden PDE-Systems sind.

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial a_{11}}{\partial x} + 2\, K_0 a_{12} - 2/3\, K_1 a_{11} & = & 0 \\ 2\, \frac{\partial a_{12}}{\partial x} + \frac{\partial a_{11}}{\partial y} + 2\, K_0 a_{22} + 2/3\, K_1 a_{12} - 4/3\, K_2 a_{11} & = & 0 \\ \frac{\partial a_{22}}{\partial x} + 2\, \frac{\partial a_{12}}{\partial y} + 4/3\, K_1 a_{22} - 2/3\, K_2 a_{12} - 2\, K_3 a_{11} & = & 0 \\ \frac{\partial a_{22}}{\partial y} + 2/3\, K_2 a_{22} - 2\, K_3 a_{12} & = & 0 \end{array} \right.$$

Also, der projektive Zusammenhang ist metrisch $\Longleftrightarrow$ das System $(*)$ hat eine nichttriviale Lösung.

Um 2. Problem von Lie zu lösen, muss man alle Konstanten A, B, C, D finden, sodass das PDE-System $(*)$ mit $K_0 = Ae^x$, $K_1 = B$, $K_2 = Ce^{-x}$, $K_3 = De^{-2x}$

Satz (Liouville 1889 – Eastwood/ M∼ 2007– Bryant/Manno/M∼ 2007) *Eine Metrik g hat genau dann den projektiven Zusammenhang*

$$y_{xx} = K_0 + K_1 y_x + K_2 (y_x)^2 + K_3 (y_x)^3$$

wenn die Einträge der Matrix $a \stackrel{\rm def}{=} (det(g))^{-2/3} g$ *die Lösungen des folgenden PDE-Systems sind.*

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial a_{11}}{\partial x} + 2\, K_0 a_{12} - 2/3\, K_1 a_{11} & = & 0 \\ 2\,\frac{\partial a_{12}}{\partial x} + \frac{\partial a_{11}}{\partial y} + 2\, K_0 a_{22} + 2/3\, K_1 a_{12} - 4/3\, K_2 a_{11} & = & 0 \\ \frac{\partial a_{22}}{\partial x} + 2\,\frac{\partial a_{12}}{\partial y} + 4/3\, K_1 a_{22} - 2/3\, K_2 a_{12} - 2\, K_3 a_{11} & = & 0 \\ \frac{\partial a_{22}}{\partial y} + 2/3\, K_2 a_{22} - 2\, K_3 a_{12} & = & 0 \end{array} \right.$$

Also, der projektive Zusammenhang ist metrisch $\Longleftrightarrow$ das System $(*)$ hat eine nichttriviale Lösung.

Um 2. Problem von Lie zu lösen, muss man alle Konstanten A, B, C, D finden, sodass das PDE-System $(*)$ mit
$K_0 = Ae^x$**,** $K_1 = B$**,** $K_2 = Ce^{-x}$**,** $K_3 = De^{-2x}$
eine nichttriviale Lösung hat.

Satz (Liouville 1889 – Eastwood/ M$\sim$ 2007– Bryant/Manno/M$\sim$ 2007) *Eine Metrik g hat genau dann den projektiven Zusammenhang*

$$y_{xx} = K_0 + K_1 y_x + K_2(y_x)^2 + K_3(y_x)^3$$

wenn die Einträge der Matrix $a \stackrel{\text{def}}{=} (\det(g))^{-2/3} g$ die Lösungen des folgenden PDE-Systems sind.

$$(*)\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial a_{11}}{\partial x} + 2\,K_0 a_{12} - 2/3\,K_1 a_{11} & = & 0 \\ 2\,\frac{\partial a_{12}}{\partial x} + \frac{\partial a_{11}}{\partial y} + 2\,K_0 a_{22} + 2/3\,K_1 a_{12} - 4/3\,K_2 a_{11} & = & 0 \\ \frac{\partial a_{22}}{\partial x} + 2\,\frac{\partial a_{12}}{\partial y} + 4/3\,K_1 a_{22} - 2/3\,K_2 a_{12} - 2\,K_3 a_{11} & = & 0 \\ \frac{\partial a_{22}}{\partial y} + 2/3\,K_2 a_{22} - 2\,K_3 a_{12} & = & 0 \end{array}\right.$$

Also, der projektive Zusammenhang ist metrisch $\Longleftrightarrow$ das System $(*)$ hat eine nichttriviale Lösung.

Um 2. Problem von Lie zu lösen, muss man alle Konstanten A, B, C, D **finden, sodass das PDE-System** $(*)$ **mit**
$K_0 = Ae^x$, $K_1 = B$, $K_2 = Ce^{-x}$, $K_3 = De^{-2x}$
eine nichttriviale Lösung hat.

Das ist eine algorithmisch lösbare Aufgabe

Satz (Liouville 1889 – Eastwood/ M$\sim$ 2007– Bryant/Manno/M$\sim$ 2007) *Eine Metrik g hat genau dann den projektiven Zusammenhang*

$$y_{xx} = K_0 + K_1 y_x + K_2 (y_x)^2 + K_3 (y_x)^3$$

wenn die Einträge der Matrix $a \stackrel{\text{def}}{=} (det(g))^{-2/3} g$ die Lösungen des folgenden PDE-Systems sind.

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial a_{11}}{\partial x} + 2\, K_0 a_{12} - 2/3\, K_1 a_{11} & = & 0 \\ 2\, \frac{\partial a_{12}}{\partial x} + \frac{\partial a_{11}}{\partial y} + 2\, K_0 a_{22} + 2/3\, K_1 a_{12} - 4/3\, K_2 a_{11} & = & 0 \\ \frac{\partial a_{22}}{\partial x} + 2\, \frac{\partial a_{12}}{\partial y} + 4/3\, K_1 a_{22} - 2/3\, K_2 a_{12} - 2\, K_3 a_{11} & = & 0 \\ \frac{\partial a_{22}}{\partial y} + 2/3\, K_2 a_{22} - 2\, K_3 a_{12} & = & 0 \end{array} \right.$$

Also, der projektive Zusammenhang ist metrisch $\Longleftrightarrow$ das System $(*)$ hat eine nichttriviale Lösung.

Um 2. Problem von Lie zu lösen, muss man alle Konstanten A, B, C, D finden, sodass das PDE-System $(*)$ mit $K_0 = Ae^x$, $K_1 = B$, $K_2 = Ce^{-x}$, $K_3 = De^{-2x}$ eine nichttriviale Lösung hat.

Das ist eine algorithmisch lösbare Aufgabe (Falls wir multiplizieren, addieren und ableiten können).

Schema:

Schema:

Das System $(*)$ besteht aus 4 Gleichungen in 3 Unbekannten.

Schema:

Das System $(*)$ besteht aus 4 Gleichungen in 3 Unbekannten. Wir leiten die Gleichungen mehrmals ab

Schema:

Das System $(*)$ besteht aus 4 Gleichungen in 3 Unbekannten. Wir leiten die Gleichungen mehrmals ab und betrachten die Ableitungen von Unbekannten als neue Unbekannten.

Schema:

Das System $(*)$ besteht aus 4 Gleichungen in 3 Unbekannten. Wir leiten die Gleichungen mehrmals ab und betrachten die Ableitungen von Unbekannten als neue Unbekannten. Anzahl von neuen Gleichungen wächst schneller als Anzahl von neuen Unbekannten:

Schema:

Das System $(*)$ besteht aus 4 Gleichungen in 3 Unbekannten. Wir leiten die Gleichungen mehrmals ab und betrachten die Ableitungen von Unbekannten als neue Unbekannten. Anzahl von neuen Gleichungen wächst schneller als Anzahl von neuen Unbekannten:

	0	1	2	3	4	...
Anzahl von Gleichungen						
Anzahl von neuen Unbekannten						
Differenz						

Schema:

Das System $(*)$ besteht aus 4 Gleichungen in 3 Unbekannten. Wir leiten die Gleichungen mehrmals ab und betrachten die Ableitungen von Unbekannten als neue Unbekannten. Anzahl von neuen Gleichungen wächst schneller als Anzahl von neuen Unbekannten:

	0	1	2	3	4	...
Anzahl von Gleichungen	4					
Anzahl von neuen Unbekannten	6					
Differenz	-2					

Schema:

Das System $(*)$ besteht aus 4 Gleichungen in 3 Unbekannten. Wir leiten die Gleichungen mehrmals ab und betrachten die Ableitungen von Unbekannten als neue Unbekannten. Anzahl von neuen Gleichungen wächst schneller als Anzahl von neuen Unbekannten:

	0	1	2	3	4	...
Anzahl von Gleichungen	4	8				
Anzahl von neuen Unbekannten	6	9				
Differenz	-2	-1				

Schema:

Das System $(*)$ besteht aus 4 Gleichungen in 3 Unbekannten. Wir leiten die Gleichungen mehrmals ab und betrachten die Ableitungen von Unbekannten als neue Unbekannten. Anzahl von neuen Gleichungen wächst schneller als Anzahl von neuen Unbekannten:

	0	1	2	3	4	...
Anzahl von Gleichungen	4	8	12			
Anzahl von neuen Unbekannten	6	9	12			
Differenz	-2	-1	0			

Schema:

Das System $(*)$ besteht aus 4 Gleichungen in 3 Unbekannten. Wir leiten die Gleichungen mehrmals ab und betrachten die Ableitungen von Unbekannten als neue Unbekannten. Anzahl von neuen Gleichungen wächst schneller als Anzahl von neuen Unbekannten:

	0	1	2	3	4	...
Anzahl von Gleichungen	4	8	12	16		
Anzahl von neuen Unbekannten	6	9	12	15		
Differenz	-2	-1	0	1		

Schema:

Das System (∗) besteht aus 4 Gleichungen in 3 Unbekannten. Wir leiten die Gleichungen mehrmals ab und betrachten die Ableitungen von Unbekannten als neue Unbekannten. Anzahl von neuen Gleichungen wächst schneller als Anzahl von neuen Unbekannten:

	0	1	2	3	4	...
Anzahl von Gleichungen	4	8	12	16	20	
Anzahl von neuen Unbekannten	6	9	12	15	18	
Differenz	-2	-1	0	1	2	

Schema:

Das System $(*)$ besteht aus 4 Gleichungen in 3 Unbekannten. Wir leiten die Gleichungen mehrmals ab und betrachten die Ableitungen von Unbekannten als neue Unbekannten. Anzahl von neuen Gleichungen wächst schneller als Anzahl von neuen Unbekannten:

	0	1	2	3	4	...
Anzahl von Gleichungen	4	8	12	16	20	...
Anzahl von neuen Unbekannten	6	9	12	15	18	...
Differenz	-2	-1	0	1	2	...

Schema:

Das System $(*)$ besteht aus 4 Gleichungen in 3 Unbekannten. Wir leiten die Gleichungen mehrmals ab und betrachten die Ableitungen von Unbekannten als neue Unbekannten. Anzahl von neuen Gleichungen wächst schneller als Anzahl von neuen Unbekannten:

	0	1	2	3	4	...
Anzahl von Gleichungen	4	8	12	16	20	...
Anzahl von neuen Unbekannten	6	9	12	15	18	...
Differenz	-2	-1	0	1	2	...

Da das System $(*)$ linear ist, kann man es nach k Schritten in Matrixform $A_k u_k = 0$ schreiben,

Schema:

Das System $(*)$ besteht aus 4 Gleichungen in 3 Unbekannten. Wir leiten die Gleichungen mehrmals ab und betrachten die Ableitungen von Unbekannten als neue Unbekannten. Anzahl von neuen Gleichungen wächst schneller als Anzahl von neuen Unbekannten:

	0	1	2	3	4	...
Anzahl von Gleichungen	4	8	12	16	20	...
Anzahl von neuen Unbekannten	6	9	12	15	18	...
Differenz	-2	-1	0	1	2	...

Da das System $(*)$ linear ist, kann man es nach k Schritten in Matrixform $A_k u_k = 0$ schreiben, wobei die Einträge von u_k die alten und die neuen Unbekannten sind.

Schema:

Das System $(*)$ besteht aus 4 Gleichungen in 3 Unbekannten. Wir leiten die Gleichungen mehrmals ab und betrachten die Ableitungen von Unbekannten als neue Unbekannten. Anzahl von neuen Gleichungen wächst schneller als Anzahl von neuen Unbekannten:

	0	1	2	3	4	...
Anzahl von Gleichungen	4	8	12	16	20	...
Anzahl von neuen Unbekannten	6	9	12	15	18	...
Differenz	-2	-1	0	1	2	...

Da das System $(*)$ linear ist, kann man es nach k Schritten in Matrixform $A_k u_k = 0$ schreiben, wobei die Einträge von u_k die alten und die neuen Unbekannten sind.

Trivial: Ist $rank(A_k) - dim(u_k) = 0$, so hat das System $(*)$ nur die Lösung $u_k = 0$.

Schema:

Das System $(*)$ besteht aus 4 Gleichungen in 3 Unbekannten. Wir leiten die Gleichungen mehrmals ab und betrachten die Ableitungen von Unbekannten als neue Unbekannten. Anzahl von neuen Gleichungen wächst schneller als Anzahl von neuen Unbekannten:

	0	1	2	3	4	...
Anzahl von Gleichungen	4	8	12	16	20	...
Anzahl von neuen Unbekannten	6	9	12	15	18	...
Differenz	-2	-1	0	1	2	...

Da das System $(*)$ linear ist, kann man es nach k Schritten in Matrixform $A_k u_k = 0$ schreiben, wobei die Einträge von u_k die alten und die neuen Unbekannten sind.

Trivial: Ist $rank(A_k) - dim(u_k) = 0$, so hat das System $(*)$ nur die Lösung $u_k = 0$.

Folklore (Frobenius): Ist $rank(A_k) < dim(u_k)$ für jedes k, so gibt es eine nichttriviale Lösung des Systems $(*)$.

Schema:

Das System $(*)$ besteht aus 4 Gleichungen in 3 Unbekannten. Wir leiten die Gleichungen mehrmals ab und betrachten die Ableitungen von Unbekannten als neue Unbekannten. Anzahl von neuen Gleichungen wächst schneller als Anzahl von neuen Unbekannten:

	0	1	2	3	4	...
Anzahl von Gleichungen	4	8	12	16	20	...
Anzahl von neuen Unbekannten	6	9	12	15	18	...
Differenz	-2	-1	0	1	2	...

Da das System $(*)$ linear ist, kann man es nach k Schritten in Matrixform $A_k u_k = 0$ schreiben, wobei die Einträge von u_k die alten und die neuen Unbekannten sind.

Trivial: Ist $rank(A_k) - dim(u_k) = 0$, so hat das System $(*)$ nur die Lösung $u_k = 0$.

Folklore (Frobenius): Ist $rank(A_k) < dim(u_k)$ für jedes k, so gibt es eine nichttriviale Lösung des Systems $(*)$.

Also, um zu verstehen, ob das System $(*)$ eine nichttriviale Lösung besitzt, muss man nur ableiten und Determinanten berechnen.

Schema:

Das System $(*)$ besteht aus 4 Gleichungen in 3 Unbekannten. Wir leiten die Gleichungen mehrmals ab und betrachten die Ableitungen von Unbekannten als neue Unbekannten. Anzahl von neuen Gleichungen wächst schneller als Anzahl von neuen Unbekannten:

	0	1	2	3	4	...
Anzahl von Gleichungen	4	8	12	16	20	...
Anzahl von neuen Unbekannten	6	9	12	15	18	...
Differenz	-2	-1	0	1	2	...

Da das System $(*)$ linear ist, kann man es nach k Schritten in Matrixform $A_k u_k = 0$ schreiben, wobei die Einträge von u_k die alten und die neuen Unbekannten sind.

Trivial: Ist $rank(A_k) - dim(u_k) = 0$, so hat das System $(*)$ nur die Lösung $u_k = 0$.

Folklore (Frobenius): Ist $rank(A_k) < dim(u_k)$ für jedes k, so gibt es eine nichttriviale Lösung des Systems $(*)$.

Also, um zu verstehen, ob das System $(*)$ eine nichttriviale Lösung besitzt, muss man nur ableiten und Determinanten berechnen.

Wir haben zuerst 2. Problem von Lie mit Hilfe von Maple gelöst,

Schema:

Das System $(*)$ besteht aus 4 Gleichungen in 3 Unbekannten. Wir leiten die Gleichungen mehrmals ab und betrachten die Ableitungen von Unbekannten als neue Unbekannten. Anzahl von neuen Gleichungen wächst schneller als Anzahl von neuen Unbekannten:

	0	1	2	3	4	...
Anzahl von Gleichungen	4	8	12	16	20	...
Anzahl von neuen Unbekannten	6	9	12	15	18	...
Differenz	-2	-1	0	1	2	...

Da das System $(*)$ linear ist, kann man es nach k Schritten in Matrixform $A_k u_k = 0$ schreiben, wobei die Einträge von u_k die alten und die neuen Unbekannten sind.

Trivial: Ist $rank(A_k) - dim(u_k) = 0$, so hat das System $(*)$ nur die Lösung $u_k = 0$.

Folklore (Frobenius): Ist $rank(A_k) < dim(u_k)$ für jedes k, so gibt es eine nichttriviale Lösung des Systems $(*)$.

Also, um zu verstehen, ob das System $(*)$ eine nichttriviale Lösung besitzt, muss man nur ableiten und Determinanten berechnen.

Wir haben zuerst 2. Problem von Lie mit Hilfe von Maple gelöst, und erst danach einen „menschlichen“ Beweis gefunden.

Methode der Lösung des 1. Problem von Lie und des Problems von Schouten

Methode der Lösung des 1. Problem von Lie und des Problems von Schouten

Rechnerisch sind diese Probleme viel aufwendiger

Methode der Lösung des 1. Problem von Lie und des Problems von Schouten

Rechnerisch sind diese Probleme viel aufwendiger —
Computer-Beweis ist nicht mehr möglich.

Methode der Lösung des 1. Problem von Lie und des Problems von Schouten

Rechnerisch sind diese Probleme viel aufwendiger —
Computer-Beweis ist nicht mehr möglich.

1. Problem von Lie:

Methode der Lösung des 1. Problem von Lie und des Problems von Schouten

Rechnerisch sind diese Probleme viel aufwendiger — Computer-Beweis ist nicht mehr möglich.

1. Problem von Lie:
Benutzt lokale Beschreibung von 2-dimensionalen Metriken, die quadratische Integrale gestatten

Methode der Lösung des 1. Problem von Lie und des Problems von Schouten

Rechnerisch sind diese Probleme viel aufwendiger —
Computer-Beweis ist nicht mehr möglich.

1. Problem von Lie:
Benutzt lokale Beschreibung von 2-dimensionalen Metriken, die quadratische Integrale gestatten
(Bolsinov, Pucacco, M$\sim$ 2008).

Methode der Lösung des 1. Problem von Lie und des Problems von Schouten

Rechnerisch sind diese Probleme viel aufwendiger — Computer-Beweis ist nicht mehr möglich.

Lichnerowicz-Vermutung:

1. Problem von Lie:
Benutzt lokale Beschreibung von 2-dimensionalen Metriken, die quadratische Integrale gestatten
(Bolsinov, Pucacco, M$\sim$ 2008).

Methode der Lösung des 1. Problem von Lie und des Problems von Schouten

Rechnerisch sind diese Probleme viel aufwendiger — Computer-Beweis ist nicht mehr möglich.

1. Problem von Lie:
Benutzt lokale Beschreibung von 2-dimensionalen Metriken, die quadratische Integrale gestatten
(Bolsinov, Pucacco, M$\sim$ 2008).

Lichnerowicz-Vermutung:

- Integrable Systeme

Methode der Lösung des 1. Problem von Lie und des Problems von Schouten

Rechnerisch sind diese Probleme viel aufwendiger — Computer-Beweis ist nicht mehr möglich.

1. Problem von Lie:
Benutzt lokale Beschreibung von 2-dimensionalen Metriken, die quadratische Integrale gestatten
(Bolsinov, Pucacco, M$\sim$ 2008).

Lichnerowicz-Vermutung:

- Integrable Systeme (Es gibt singuläre Punkte von Levi-Civita'scher Blätterung)

Methode der Lösung des 1. Problem von Lie und des Problems von Schouten

Rechnerisch sind diese Probleme viel aufwendiger — Computer-Beweis ist nicht mehr möglich.

1. Problem von Lie:
Benutzt lokale Beschreibung von 2-dimensionalen Metriken, die quadratische Integrale gestatten
(Bolsinov, Pucacco, M$\sim$ 2008).

Lichnerowicz-Vermutung:

- Integrable Systeme (Es gibt singuläre Punkte von Levi-Civita'scher Blätterung)
- Regularitätsfragen (Analysis in der Umgebung von singulären Punkten, Geometrische Theorie von PDE)

Methode der Lösung des 1. Problem von Lie und des Problems von Schouten

Rechnerisch sind diese Probleme viel aufwendiger — Computer-Beweis ist nicht mehr möglich.

1. Problem von Lie:
Benutzt lokale Beschreibung von 2-dimensionalen Metriken, die quadratische Integrale gestatten
(Bolsinov, Pucacco, M$\sim$ 2008).

Lichnerowicz-Vermutung:

- Integrable Systeme (Es gibt singuläre Punkte von Levi-Civita'scher Blätterung)
- Regularitätsfragen (Analysis in der Umgebung von singulären Punkten, Geometrische Theorie von PDE)
- Globale Analysis

Methode der Lösung des 1. Problem von Lie und des Problems von Schouten

Rechnerisch sind diese Probleme viel aufwendiger — Computer-Beweis ist nicht mehr möglich.

1. Problem von Lie:
Benutzt lokale Beschreibung von 2-dimensionalen Metriken, die quadratische Integrale gestatten
(Bolsinov, Pucacco, M$\sim$ 2008).

Lichnerowicz-Vermutung:

- Integrable Systeme (Es gibt singuläre Punkte von Levi-Civita'scher Blätterung)
- Regularitätsfragen (Analysis in der Umgebung von singulären Punkten, Geometrische Theorie von PDE)
- Globale Analysis

Plan meines Vortrags:

Plan meines Vortrags:

- Die Lösung der topologischen Version des Problems von Beltrami
  - Beweis für Dimension 2
  - Beweismethoden für beliebige Dimension
- Die Lösung der zwei Probleme von Lie und des Problems von Schouten
  - Computer-basierte Lösung des 2. Problems von Lie
- www.minet.uni-jena.de/∼matveev/

Plan meines Vortrags:

- Die Lösung der topologischen Version des Problems von Beltrami
  - Beweis für Dimension 2
  - Beweismethoden für beliebige Dimension
- Die Lösung der zwei Probleme von Lie und des Problems von Schouten
  - Computer-basierte Lösung des 2. Problems von Lie
- www.minet.uni-jena.de/∼matveev/
- Vielen Dank

Plan meines Vortrags:

- Die Lösung der topologischen Version des Problems von Beltrami
  - Beweis für Dimension 2
  - Beweismethoden für beliebige Dimension
- Die Lösung der zwei Probleme von Lie und des Problems von Schouten
  - Computer-basierte Lösung des 2. Problems von Lie
- www.minet.uni-jena.de/∼matveev/