Vladimir S. Matveev

Geodätisch äquivalente Metriken, integrable Systeme und Topologie.

- Geodätisch äquivalente Metriken.
- Polyedrische Mannigfaltigkeiten.
- Topologie von integrablen Systemen.
- www.minet.uni-jena.de/∼matveev/

Hauptdefinition und klassische Beispiele

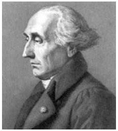
Hauptdefinition und klassische Beispiele

Def. Zwei Metriken g und $\bar{g}$ auf einer Mannigfaltigkeit M sind geodätisch äquivalent, falls sie gleiche (nichtparametrisierte) Geodäten haben.

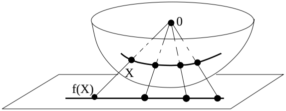
Hauptdefinition und klassische Beispiele

Def. Zwei Metriken g und $\bar{g}$ auf einer Mannigfaltigkeit M sind geodätisch äquivalent, falls sie gleiche (nichtparametrisierte) Geodäten haben. (Bezeichnung: $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$)

Def. Zwei Metriken g und $\bar{g}$ auf einer Mannigfaltigkeit M sind geodätisch äquivalent, falls sie gleiche (nichtparametrisierte) Geodäten haben. (Bezeichnung: $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$)

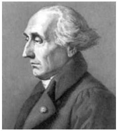


Lagrange 1789: Radiale Projektion
$f : S^2_{\frac{1}{2}} \to \mathbb{R}^2$ bildet Geodäten
der Halbsphäre (Großkreise)
auf Geodäten der Ebene (Geraden) ab.

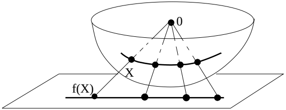


Hauptdefinition und klassische Beispiele

Def. Zwei Metriken g und $\bar{g}$ auf einer Mannigfaltigkeit M sind geodätisch äquivalent, falls sie gleiche (nichtparametrisierte) Geodäten haben. (Bezeichnung: $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$)



Lagrange 1789: Radiale Projektion
$f : S^2_{\frac{1}{2}} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ bildet Geodäten
der Halbsphäre (Großkreise)
auf Geodäten der Ebene (Geraden) ab.

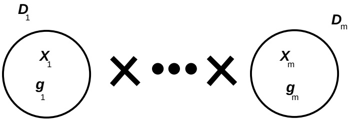


Beltrami 1865 hat das Beispiel von Lagrange verbessert:
Für jede Matrix $A \in SL(n+1)$ führt der Diffeomorphismus
$a : S^n \to S^n$, $a(x) := \frac{A(x)}{|A(x)|}$
die Geodäten in Geodäten über.

Beispiel von Levi-Civita und Dini

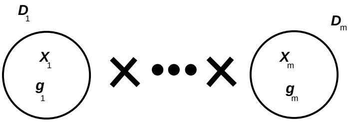
Beispiel von Levi-Civita und Dini

- $D_1, \ldots, D_m$ seien die Bälle



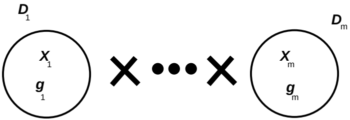
Beispiel von Levi-Civita und Dini

- $D_1, \ldots, D_m$ seien die Bälle
- g_i sei eine Riemannsche Metrik auf D_i



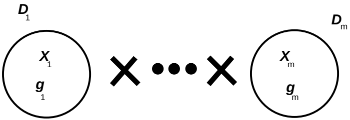
Beispiel von Levi-Civita und Dini

- $D_1, \ldots, D_m$ seien die Bälle
- g_i sei eine Riemannsche Metrik auf D_i
- $X_i : D_i \to \mathbb{R}_{>0}$ sodass



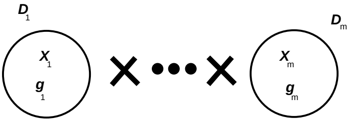
Beispiel von Levi-Civita und Dini

- $D_1, \ldots, D_m$ seien die Bälle
- g_i sei eine Riemannsche Metrik auf D_i
- $X_i : D_i \to \mathbb{R}_{>0}$ sodass
  - $\forall x_i \in D_i,\ x_j \in D_j \quad X_i(x_i) \neq X_j(x_j)$ $(i \neq j)$



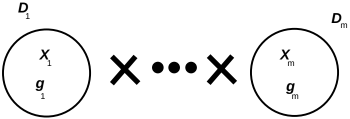
Beispiel von Levi-Civita und Dini

- $D_1, \ldots, D_m$ seien die Bälle
- g_i sei eine Riemannsche Metrik auf D_i
- $X_i : D_i \to \mathbb{R}_{>0}$ sodass
  - $\forall x_i \in D_i,\ x_j \in D_j \quad X_i(x_i) \neq X_j(x_j)$ $(i \neq j)$
  - $dim(D_i) \geq 2 \implies X_i = \mathrm{konst}_i$



Beispiel von Levi-Civita und Dini

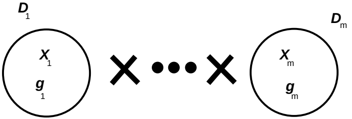
- $D_1, \ldots, D_m$ seien die Bälle
- g_i sei eine Riemannsche Metrik auf D_i
- $X_i : D_i \to \mathbb{R}_{>0}$ sodass
  - $\forall x_i \in D_i,\ x_j \in D_j \quad X_i(x_i) \neq X_j(x_j)$ $(i \neq j)$
  - $dim(D_i) \geq 2 \Longrightarrow X_i = \mathrm{konst}_i$



$g := \sum_i g_i$

Beispiel von Levi-Civita und Dini

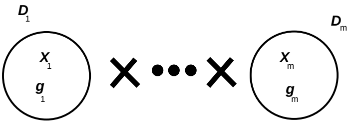
- $D_1, \ldots, D_m$ seien die Bälle
- g_i sei eine Riemannsche Metrik auf D_i
- $X_i : D_i \to \mathbb{R}_{>0}$ sodass
  - $\forall x_i \in D_i,\ x_j \in D_j \quad X_i(x_i) \neq X_j(x_j)$ $(i \neq j)$
  - $dim(D_i) \geq 2 \implies X_i = \mathrm{konst}_i$



$$g := \sum_i \underbrace{\prod_{j \neq i} |(X_i(x_i) - X_j(x_j))|}_{P_i} g_i$$

Beispiel von Levi-Civita und Dini

- $D_1, \ldots, D_m$ seien die Bälle
- g_i sei eine Riemannsche Metrik auf D_i
- $X_i : D_i \to \mathbb{R}_{>0}$ sodass
  - $\forall x_i \in D_i,\ x_j \in D_j \quad X_i(x_i) \neq X_j(x_j)$ $(i \neq j)$
  - $dim(D_i) \geq 2 \implies X_i = \mathrm{konst}_i$

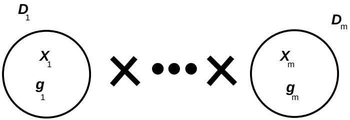


$$g := \sum_i \underbrace{\prod_{j \neq i} |(X_i(x_i) - X_j(x_j))|}_{P_i} g_i$$

$$\bar{g} := \sum_i \qquad g_i$$

Beispiel von Levi-Civita und Dini

- $D_1, \dots, D_m$ seien die Bälle
- g_i sei eine Riemannsche Metrik auf D_i
- $X_i : D_i \to \mathbb{R}_{>0}$ sodass
  - $\forall x_i \in D_i,\ x_j \in D_j \quad X_i(x_i) \neq X_j(x_j)$ $(i \neq j)$
  - $dim(D_i) \geq 2 \implies X_i = \mathrm{konst}_i$

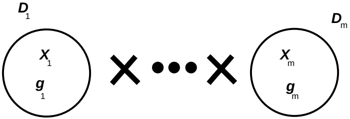


$$g := \sum_i \underbrace{\prod_{j\neq i} |(X_i(x_i) - X_j(x_j))|}_{P_i} \, g_i$$

$$\bar{g} := \sum_i \underbrace{\frac{1}{X_i} \prod_{\alpha} \frac{1}{X_\alpha}}_{\rho_i} \underbrace{\prod_{j\neq i} |(X_i - X_j)|}_{P_i} \, g_i$$

Beispiel von Levi-Civita und Dini

- $D_1, \ldots, D_m$ seien die Bälle
- g_i sei eine Riemannsche Metrik auf D_i
- $X_i : D_i \to \mathbb{R}_{>0}$ sodass
  - $\forall x_i \in D_i,\ x_j \in D_j \quad X_i(x_i) \neq X_j(x_j)$ $(i \neq j)$
  - $dim(D_i) \geq 2 \implies X_i = \mathrm{konst}_i$



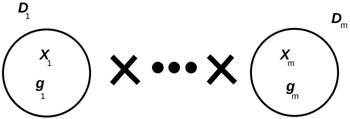
$$g := \sum_i \underbrace{\prod_{j\neq i} |(X_i(x_i) - X_j(x_j))|}_{P_i}\, g_i$$

$$\bar{g} := \sum_i \underbrace{\frac{1}{X_i} \prod_{\alpha} \frac{1}{X_\alpha}}_{\rho_i} \underbrace{\prod_{j\neq i} |(X_i - X_j)|}_{P_i}\, g_i$$

Levi-Civita  1896: Es gilt:

Beispiel von Levi-Civita und Dini

- $D_1, \ldots, D_m$ seien die Bälle
- g_i sei eine Riemannsche Metrik auf D_i
- $X_i : D_i \to \mathbb{R}_{>0}$ sodass
  - $\forall x_i \in D_i,\ x_j \in D_j \quad X_i(x_i) \neq X_j(x_j)$ $(i \neq j)$
  - $dim(D_i) \geq 2 \implies X_i = \mathrm{konst}_i$



$$g := \sum_i \underbrace{\prod_{j \neq i} |(X_i(x_i) - X_j(x_j))|}_{P_i} g_i$$

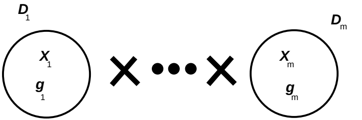
$$\bar{g} := \sum_i \underbrace{\frac{1}{X_i} \prod_{\alpha} \frac{1}{X_\alpha}}_{\rho_i} \underbrace{\prod_{j \neq i} |(X_i - X_j)|}_{P_i} g_i$$

Levi-Civita  1896: Es gilt:

- $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$

Beispiel von Levi-Civita und Dini

- $D_1, \ldots, D_m$ seien die Bälle
- g_i sei eine Riemannsche Metrik auf D_i
- $X_i : D_i \to \mathbb{R}_{>0}$ sodass
  - $\forall x_i \in D_i,\ x_j \in D_j \quad X_i(x_i) \neq X_j(x_j)$ $(i \neq j)$
  - $dim(D_i) \geq 2 \Longrightarrow X_i = \mathrm{konst}_i$



$$g := \sum_i \underbrace{\prod_{j\neq i} |(X_i(x_i) - X_j(x_j))|}_{P_i}\, g_i$$

$$\bar{g} := \sum_i \underbrace{\frac{1}{X_i}\prod_{\alpha}\frac{1}{X_\alpha}}_{\rho_i} \underbrace{\prod_{j\neq i} |(X_i - X_j)|}_{P_i}\, g_i$$

Levi-Civita  1896: Es gilt:

- $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$
- zwei geodätisch äquivalente Metriken kann man in der Umgebung fast jedes Punktes in diese Form bringen.

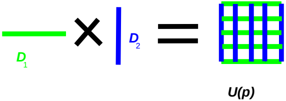
2-dimensionale Version von Levi-Civita

2-dimensionale Version von Levi-Civita

In Dimension 2 sind die Bälle im Levi-Civita-Theorem Intervalle,

2-dimensionale Version von Levi-Civita

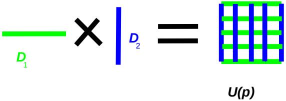
In Dimension 2 sind die Bälle im Levi-Civita-Theorem Intervalle, also
$U(p) = \underbrace{(-\varepsilon, \varepsilon)}_{x} \times \underbrace{(-\varepsilon, \varepsilon)}_{y}$



2-dimensionale Version von Levi-Civita

In Dimension 2 sind die Bälle im Levi-Civita-Theorem Intervalle, also

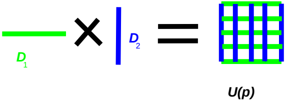
$$U(p) = \underbrace{(-\varepsilon, \varepsilon)}_{x} \times \underbrace{(-\varepsilon, \varepsilon)}_{y}$$



Dini  1869: Es gilt:

2-dimensionale Version von Levi-Civita

In Dimension 2 sind die Bälle im Levi-Civita-Theorem Intervalle, also $U(p) = \underbrace{(-\varepsilon, \varepsilon)}_{x} \times \underbrace{(-\varepsilon, \varepsilon)}_{y}$

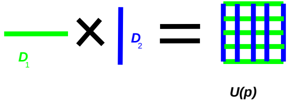


Dini  1869: Es gilt:

- $(X(x) - Y(y))(dx^2 + dy^2) \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \frac{X(x)-Y(y)}{X(x)Y(y)} \left(\frac{dx^2}{X(x)} + \frac{dy^2}{Y(y)} \right)$

2-dimensionale Version von Levi-Civita

In Dimension 2 sind die Bälle im Levi-Civita-Theorem Intervalle, also
$U(p) = \underbrace{(-\varepsilon, \varepsilon)}_{x} \times \underbrace{(-\varepsilon, \varepsilon)}_{y}$



Dini  1869: Es gilt:

- $(X(x) - Y(y))(dx^2 + dy^2) \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \frac{X(x)-Y(y)}{X(x)Y(y)}\left(\frac{dx^2}{X(x)} + \frac{dy^2}{Y(y)}\right)$
- zwei geodätisch äquivalente Metriken auf der Fläche kann man in der Umgebung fast jedes Punktes in diese Form bringen.

Wichtige Beobachtung:

$=$

Wichtige Beobachtung:

Die geodätisch äquivalenten Metriken g und $\bar{g}$ bestimmen die Daten (D_i, g_i, X_i).

$=$

Wichtige Beobachtung:

Die geodätisch äquivalenten Metriken g und $\bar{g}$ bestimmen die Daten $(D_i,\, g_i,\, X_i)$. Tatsächlich, $(1,1)$-Tensor

$=$

Wichtige Beobachtung:

Die geodätisch äquivalenten Metriken g und $\bar{g}$ bestimmen die Daten (D_i, g_i, X_i). Tatsächlich, $(1,1)$-Tensor $L := (\bar{g})^{-1}g \cdot \left(\frac{det(\bar{g})}{det(g)}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$=$

Wichtige Beobachtung:

Die geodätisch äquivalenten Metriken g und $\bar{g}$ bestimmen die Daten (D_i, g_i, X_i). Tatsächlich, $(1,1)$-Tensor $L := (\bar{g})^{-1} g \cdot \left(\frac{det(\bar{g})}{det(g)}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{\frac{1}{\rho_1 P_1}(g_1)^{-1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\frac{1}{\rho_m P_m}(g_m)^{-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{P_1 g_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{P_m g_m} \end{pmatrix}$$

$=$

Wichtige Beobachtung:

Die geodätisch äquivalenten Metriken g und $\bar{g}$ bestimmen die Daten $(D_i,\ g_i,\ X_i)$. Tatsächlich, $(1,1)$-Tensor $L := (\bar{g})^{-1}g \cdot \left(\frac{det(\bar{g})}{det(g)}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{\frac{1}{\rho_1 P_1}(g_1)^{-1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\frac{1}{\rho_m P_m}(g_m)^{-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{P_1 g_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{P_m g_m} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} X_1 & & \\ & \ddots & \\ & & X_1 \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} X_m & & \\ & \ddots & \\ & & X_m \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Wichtige Beobachtung:

Die geodätisch äquivalenten Metriken g und $\bar{g}$ bestimmen die Daten $(D_i,\ g_i,\ X_i)$. Tatsächlich, $(1,1)$-Tensor $L := (\bar{g})^{-1} g \cdot \left(\frac{det(\bar{g})}{det(g)}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{\frac{1}{\rho_1 P_1}\,(g_1)^{-1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\frac{1}{\rho_m P_m}\,(g_m)^{-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{P_1 g_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{P_m g_m} \end{pmatrix} \cdot \prod_\alpha \frac{1}{X_\alpha}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} X_1 & & \\ & \ddots & \\ & & X_1 \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} X_m & & \\ & \ddots & \\ & & X_m \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Wichtige Beobachtung:

Die geodätisch äquivalenten Metriken g und $\bar g$ bestimmen die Daten $(D_i,\, g_i,\, X_i)$. Tatsächlich, $(1,1)$-Tensor $L := (\bar g)^{-1} g \cdot \left(\frac{det(\bar g)}{det(g)}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{\frac{1}{\rho_1 P_1}(g_1)^{-1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\frac{1}{\rho_m P_m}(g_m)^{-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{P_1 g_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{P_m g_m} \end{pmatrix} \cdot \prod_\alpha \frac{1}{X_\alpha}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} X_1 & & \\ & \ddots & \\ & & X_1 \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} X_m & & \\ & \ddots & \\ & & X_m \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

- Distributionen der Eigenräume von L sind integrabel und generieren Blätterungen (fast überall)

Wichtige Beobachtung:

Die geodätisch äquivalenten Metriken g und $\bar{g}$ bestimmen die Daten $(D_i,\, g_i,\, X_i)$. Tatsächlich, $(1,1)$-Tensor $L := (\bar{g})^{-1} g \cdot \left(\frac{det(\bar{g})}{det(g)}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{\frac{1}{\rho_1 P_1}\,(g_1)^{-1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\frac{1}{\rho_m P_m}\,(g_m)^{-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{P_1 g_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{P_m g_m} \end{pmatrix} \cdot \prod_{\alpha} \frac{1}{X_\alpha}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} X_1 & & \\ & \ddots & \\ & & X_1 \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} X_m & & \\ & \ddots & \\ & & X_m \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

- Distributionen der Eigenräume von L sind integrabel und generieren Blätterungen (fast überall)
- die Blätter sind lokal D_i

Wichtige Beobachtung:

Die geodätisch äquivalenten Metriken g und $\bar{g}$ bestimmen die Daten $(D_i,\ g_i,\ X_i)$. Tatsächlich, $(1,1)$-Tensor $L := (\bar{g})^{-1} g \cdot \left(\frac{det(\bar{g})}{det(g)}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{\frac{1}{\rho_1 P_1}(g_1)^{-1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\frac{1}{\rho_m P_m}(g_m)^{-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{P_1 g_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{P_m g_m} \end{pmatrix} \cdot \prod_\alpha \frac{1}{X_\alpha}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} X_1 & & \\ & \ddots & \\ & & X_1 \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} X_m & & \\ & \ddots & \\ & & X_m \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

- Distributionen der Eigenräume von L sind integrabel und generieren Blätterungen (fast überall)
- die Blätter sind lokal D_i
- Die Funktionen X_i sind Eigenwerte von L

Fazit:

Fazit:

- $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ geben uns paarweise transversale (singuläre) Levi-Civita-Blätterungen $B_1, \ldots, B_m$ auf M s.d. $dim(B_1) + \cdots + dim(B_m) = dim(M)$

Fazit:

- $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ geben uns paarweise transversale (singuläre) Levi-Civita-Blätterungen $B_1, \ldots, B_m$ auf M s.d. $dim(B_1) + \cdots + dim(B_m) = dim(M)$
- Diese Blätterungen enthalten viel Informationen über geodätisch äquivalente Metriken.

Fazit:

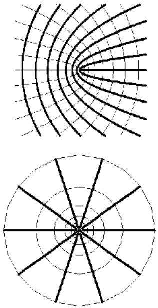
- $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ geben uns paarweise transversale (singuläre) Levi-Civita-Blätterungen $B_1, \ldots, B_m$ auf M s.d. $dim(B_1) + \cdots + dim(B_m) = dim(M)$
- Diese Blätterungen enthalten viel Informationen über geodätisch äquivalente Metriken.
- Falls $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ auf M gegeben sind, können wir neue Beispiele von geodätisch äquivalenten Metriken konstruieren:

Fazit:

- $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ geben uns paarweise transversale (singuläre) Levi-Civita-Blätterungen $B_1, \ldots, B_m$ auf M s.d. $dim(B_1) + \cdots + dim(B_m) = dim(M)$
- Diese Blätterungen enthalten viel Informationen über geodätisch äquivalente Metriken.
- Falls $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ auf M gegeben sind, können wir neue Beispiele von geodätisch äquivalenten Metriken konstruieren: wir erhalten die Blätterungen und ändern X_i und g_i.

Fazit:

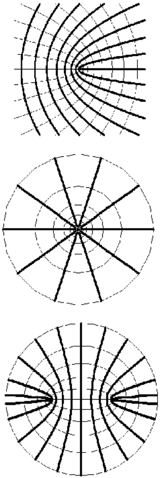
- $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ geben uns paarweise transversale (singuläre) Levi-Civita-Blätterungen $B_1, \ldots, B_m$ auf M s.d. $dim(B_1) + \cdots + dim(B_m) = dim(M)$
- Diese Blätterungen enthalten viel Informationen über geodätisch äquivalente Metriken.
- Falls $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ auf M gegeben sind, können wir neue Beispiele von geodätisch äquivalenten Metriken konstruieren: wir erhalten die Blätterungen und ändern X_i und g_i.



Mögliche Singularitäten der Blätterung in Dim 2

Fazit:

- $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ geben uns paarweise transversale (singuläre) Levi-Civita-Blätterungen $B_1, \ldots, B_m$ auf M s.d. $dim(B_1) + \cdots + dim(B_m) = dim(M)$
- Diese Blätterungen enthalten viel Informationen über geodätisch äquivalente Metriken.
- Falls $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ auf M gegeben sind, können wir neue Beispiele von geodätisch äquivalenten Metriken konstruieren: wir erhalten die Blätterungen und ändern X_i und g_i.



Mögliche Singularitäten der Blätterung in Dim 2

Das Problem von Beltrami

Das Problem von Beltrami

Beltrami 1865: La seconda . . . generalizzazione ... del nostro problema, vale a dire: riportare i punti di una superficie sopra un' altra superficie in modo che alle linee geodetiche della prima corrispondano linee geodetiche della seconda.

Das Problem von Beltrami

Beltrami 1865: La seconda . . . generalizzazione ... del nostro problema, vale a dire: riportare i punti di una superficie sopra un' altra superficie in modo che alle linee geodetiche della prima corrispondano linee geodetiche della seconda.

Übersetzung: Man soll alle Paare von geodätisch äquivalenten Metriken beschreiben.

Antwort

Antwort

Satz (M$\sim$ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$.*

Antwort

Satz (M$\sim$ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

Antwort

Satz (M$\sim$ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*

Antwort

Satz (M∼ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*

  $M \overset{diffeo}{\approx} S^n/_G$, *sodass* $G \in O(n+1)$

Antwort

Satz (M$\sim$ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*

  $M \overset{diffeo}{\approx} S^n/_G$, *sodass* $G \in O(n+1)$ $\Bigg\{$

Antwort

Satz (M∼ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*

  $$M \overset{diffeo}{\approx} S^n/_G, \text{ sodass } G \in O(n+1) \left\{ \right.$$

Antwort

Satz (M∼ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*
  $$M \overset{diffeo}{\approx} S^n/_G, \text{ sodass } G \in O(n+1) \left\{ \begin{array}{l} \qquad\qquad ist\ diskret, \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

Antwort

Satz (M∼ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \stackrel{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*

  $$M \stackrel{diffeo}{\approx} S^n/_G, \text{ sodass } G \in O(n+1) \left\{ \begin{array}{l} \quad ist\ diskret, \\ \\ \end{array} \right.$$

Antwort

Satz (M∼ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*
  $M \overset{diffeo}{\approx} S^n/_G$, *sodass* $G \in O(n+1)$ $\left\{ \begin{array}{l} \quad\quad\quad ist\ diskret, \\ \\ \end{array} \right.$

Antwort

Satz (M∼ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*
  $$M \overset{diffeo}{\approx} S^n/_G, \text{ sodass } G \in O(n+1) \begin{cases} \quad ist\ diskret, \\ \\ \end{cases}$$

Antwort

Satz (M∼ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*
  $M \overset{diffeo}{\approx} S^n/_G$, *sodass* $G \in O(n+1)$ $\left\{ \begin{array}{c} ist\ diskret, \\ operiert\ frei\ auf\ S^n \end{array} \right.$

Antwort

Satz (M$\sim$ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*

  $M \overset{diffeo}{\approx} S^n/_G$, *sodass* $G \in O(n+1)$ $\left\{ \begin{array}{c} ist\ diskret, \\ operiert\ frei\ auf\ S^n \\ \\ \end{array} \right.$

Antwort

Satz (M$\sim$ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*
  $M \overset{diffeo}{\approx} S^n/_G$, *sodass* $G \in O(n+1)$ $\left\{ \begin{array}{c} ist\ diskret, \\ operiert\ frei\ auf\ S^n \\ \end{array} \right.$

Antwort

Satz (M∼ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*

  $$M \overset{diffeo}{\approx} S^n/_G, \text{ sodass } G \in O(n+1) \begin{cases} ist\ diskret, \\ operiert\ frei\ auf\ S^n \\ = G_1 + G_2 \end{cases}$$

Antwort

Satz (M$\sim$ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*

  $$M \overset{diffeo}{\approx} S^n/_G, \text{ sodass } G \in O(n+1) \begin{cases} \text{ist diskret,} \\ \text{operiert frei auf } S^n \\ = G_1 + G_2 \end{cases}$$

oder

Antwort

Satz (M∼ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*

$$M \overset{diffeo}{\approx} S^n/_G, \text{ sodass } G \in O(n+1) \begin{cases} \text{ist diskret,} \\ \text{operiert frei auf } S^n \\ = G_1 + G_2 \end{cases}$$

oder

- *$\exists \hat{g}$ auf M, sodass die Holonomiegruppe reduzibel ist.*

Antwort

Satz (M$\sim$ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*

  $$M \overset{diffeo}{\approx} S^n/_G, \text{ sodass } G \in O(n+1) \begin{cases} \text{ist diskret,} \\ \text{operiert frei auf } S^n \\ = G_1 + G_2 \end{cases}$$

oder

- *$\exists \hat{g}$ auf M, sodass die Holonomiegruppe reduzibel ist.*

Antwort

Satz (M$\sim$ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*

$$M \overset{diffeo}{\approx} S^n/_G, \text{ sodass } G \in O(n+1) \begin{cases} ist\ diskret, \\ operiert\ frei\ auf\ S^n \\ = G_1 + G_2 \end{cases}$$

oder

- *$\exists \hat{g}$ auf M, sodass die Holonomiegruppe reduzibel ist.*

Folgerung 1 (Topalov, M$\sim$ 2001): Jede geschlossene orientierte Fläche mit nichtproportionalen $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ ist (homöomorph zu) S^2 oder T^2.

Antwort

Satz (M$\sim$ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*

$$M \overset{diffeo}{\approx} S^n/_G, \text{ sodass } G \in O(n+1) \begin{cases} \text{ist diskret,} \\ \text{operiert frei auf } S^n \\ = G_1 + G_2 \end{cases}$$

oder

- *$\exists \hat{g}$ auf M, sodass die Holonomiegruppe reduzibel ist.*

Folgerung 1 (Topalov, M$\sim$ 2001): Jede geschlossene orientierte Fläche mit nichtproportionalen $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ ist (homöomorph zu) S^2 oder T^2.

Folgerung 2 (M$\sim$ 2003):

Antwort

Satz (M$\sim$ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*

$$M \overset{diffeo}{\approx} S^n/_G, \text{ sodass } G \in O(n+1) \begin{cases} ist\ diskret, \\ operiert\ frei\ auf\ S^n \\ = G_1 + G_2 \end{cases}$$

oder

- *$\exists \hat{g}$ auf M, sodass die Holonomiegruppe reduzibel ist.*

Folgerung 1 (Topalov, M$\sim$ 2001): Jede geschlossene orientierte Fläche mit nichtproportionalen $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ ist (homöomorph zu) S^2 oder T^2.

Folgerung 2 (M$\sim$ 2003): Jede geschlossene 3-Mannigfaltigkeit mit nichtproportionalen $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ ist $L_{p,q}$ oder Seifertmannigfaltigkeit mit Eulerzahl gleich 0.

Antwort

Satz (M$\sim$ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*

$$M \overset{diffeo}{\approx} S^n/_G, \text{ sodass } G \in O(n+1) \left\{ \begin{array}{c} ist\ diskret, \\ operiert\ frei\ auf\ S^n \\ = G_1 + G_2 \end{array} \right.$$

oder

- *$\exists \hat{g}$ auf M, sodass die Holonomiegruppe reduzibel ist.*

Folgerung 1 (Topalov, M$\sim$ 2001): Jede geschlossene orientierte Fläche mit nichtproportionalen $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ ist (homöomorph zu) S^2 oder T^2.

Folgerung 2 (M$\sim$ 2003): Jede geschlossene 3-Mannigfaltigkeit mit nichtproportionalen $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ ist $L_{p,q}$ oder Seifertmannigfaltigkeit mit Eulerzahl gleich 0.
($L_{p,q}$ sind Raumformen,
Seifertmannigfaltigkeit mit Eulerzahl 0 sind die 3-Mannigfaltigkeiten, die Metriken mit reduzibler Holonomiegruppe erlauben.)

Antwort

Satz (M$\sim$ 2007) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*

$$M \overset{diffeo}{\approx} S^n/_G, \text{ sodass } G \in O(n+1) \left\{ \begin{array}{c} ist\ diskret, \\ operiert\ frei\ auf\ S^n \\ = G_1 + G_2 \end{array} \right.$$

oder

- *$\exists \hat{g}$ auf M, sodass die Holonomiegruppe reduzibel ist.*

Folgerung 1 (Topalov, M$\sim$ 2001): Jede geschlossene orientierte Fläche mit nichtproportionalen $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ ist (homöomorph zu) S^2 oder T^2.

Folgerung 2 (M$\sim$ 2003): Jede geschlossene 3-Mannigfaltigkeit mit nichtproportionalen $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ ist $L_{p,q}$ oder Seifertmannigfaltigkeit mit Eulerzahl gleich 0.
($L_{p,q}$ sind Raumformen,
Seifertmannigfaltigkeit mit Eulerzahl 0 sind die 3-Mannigfaltigkeiten, die Metriken mit reduzibler Holonomiegruppe erlauben.)

Gegeben sei $g, \; \bar{g}$ auf M^n

Integrable Systemen in Theorie von geod. äquiv. Metriken

Gegeben sei $g, \ \bar{g}$ auf M^n $\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$

Integrable Systemen in Theorie von geod. äquiv. Metriken

Gegeben sei $g, \ \bar{g}$ auf M^n $\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $L := \bar{g}^{-1} g$

Gegeben sei $g, \ \bar{g}$ auf M^n $\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $L := \bar{g}^{-1} g \cdot \left(\frac{\det \bar{g}}{\det g}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

Integrable Systemen in Theorie von geod. äquiv. Metriken

Gegeben sei $g, \ \bar{g}$ auf M^n $\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $L := \bar{g}^{-1} g \cdot \left(\frac{\det \bar{g}}{\det g} \right)^{\frac{1}{n+1}}$

$\xrightarrow{\forall t \in \mathbb{R} \text{ man konstruiere}}$ $S_t := (L - t \cdot \mathbf{Id})^{-1} \cdot det(L - t \cdot \mathbf{Id})$

Integrable Systemen in Theorie von geod. äquiv. Metriken

Gegeben sei g, $\bar{g}$ auf M^n $\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $L := \bar{g}^{-1} g \cdot \left(\frac{\det \bar{g}}{\det g} \right)^{\frac{1}{n+1}}$

$\xrightarrow{\forall t \in \mathbb{R} \text{ man konstruiere}}$ $S_t := (L - t \cdot \mathbf{Id})^{-1} \cdot det(L - t \cdot \mathbf{Id})$

$\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ I_t :

Integrable Systemen in Theorie von geod. äquiv. Metriken

Gegeben sei g, $\bar{g}$ auf M^n $\xrightarrow{\text{man konstruiere}} L := \bar{g}^{-1} g \cdot \left(\frac{\det \bar{g}}{\det g} \right)^{\frac{1}{n+1}}$

$\xrightarrow{\forall t \in \mathbb{R} \text{ man konstruiere}} S_t := (L - t \cdot \mathbf{Id})^{-1} \cdot det(L - t \cdot \mathbf{Id})$

$\xrightarrow{\text{man konstruiere}} I_t : TM^n \to \mathbb{R},$

Integrable Systemen in Theorie von geod. äquiv. Metriken

Gegeben sei $g, \ \bar{g}$ auf M^n $\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $L := \bar{g}^{-1} g \cdot \left(\frac{\det \bar{g}}{\det g}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$\xrightarrow{\forall t \in \mathbb{R} \text{ man konstruiere}}$ $S_t := (L - t \cdot \mathbf{Id})^{-1} \cdot det(L - t \cdot \mathbf{Id})$

$\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $I_t : TM^n \to \mathbb{R}, I_t(\xi) := g(S_t(\xi), \xi)$.

Integrable Systemen in Theorie von geod. äquiv. Metriken

Gegeben sei g, $\bar g$ auf M^n $\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $L := \bar g^{-1} g \cdot \left(\frac{\det \bar g}{\det g}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$\xrightarrow{\forall t \in \mathbb{R} \text{ man konstruiere}}$ $S_t := (L - t \cdot \mathbf{Id})^{-1} \cdot det(L - t \cdot \mathbf{Id})$

$\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $I_t : TM^n \to \mathbb{R}, I_t(\xi) := g(S_t(\xi), \xi)$.

Satz (Topalov, M$\sim$ 1998):

Ist $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar g$, so sind $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ die Funktionen I_{t_i} kommutierende Integrale für den geodätischen Fluss von g (d.h. für die Hamiltonsche Funktion $H(\xi) := g(\xi, \xi)$)

Gegeben sei g, $\bar g$ auf M^n $\xrightarrow{\text{man konstruiere}} L := \bar g^{-1} g \cdot \left(\frac{\det \bar g}{\det g}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$\xrightarrow{\forall t \in \mathbb{R} \text{ man konstruiere}} S_t := (L - t\cdot \mathbf{Id})^{-1} \cdot det(L - t \cdot \mathbf{Id})$

$\xrightarrow{\text{man konstruiere}} I_t : TM^n \to \mathbb{R}, I_t(\xi) := g(S_t(\xi), \xi).$

Satz (Topalov, M$\sim$ 1998):

Ist $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar g$, so sind $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ die Funktionen I_{t_i} kommutierende Integrale für den geodätischen Fluss von g (d.h. für die Hamiltonsche Funktion $H(\xi) := g(\xi, \xi)$)

Eine Funktion $I : TM \to \mathbb{R}$ ist ein Integral für g,

Integrable Systemen in Theorie von geod. äquiv. Metriken

Gegeben sei g, $\bar g$ auf M^n $\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $L := \bar g^{-1} g \cdot \left(\frac{\det \bar g}{\det g}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$\xrightarrow{\forall t \in \mathbb{R} \text{ man konstruiere}}$ $S_t := (L - t\cdot \mathbf{Id})^{-1} \cdot det(L - t \cdot \mathbf{Id})$

$\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $I_t : TM^n \to \mathbb{R}, I_t(\xi) := g(S_t(\xi), \xi)$.

Satz (Topalov, M$\sim$ 1998):

Ist $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar g$, so sind $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ die Funktionen I_{t_i} kommutierende Integrale für den geodätischen Fluss von g (d.h. für die Hamiltonsche Funktion $H(\xi) := g(\xi, \xi)$)

Eine Funktion $I : TM \to \mathbb{R}$ ist ein Integral für g, wenn für jede Geodäte $c : \mathbb{R} \to M$ gilt:

Integrable Systemen in Theorie von geod. äquiv. Metriken

Gegeben sei g, $\bar g$ auf M^n $\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $L := \bar g^{-1} g \cdot \left(\frac{\det \bar g}{\det g}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$\xrightarrow{\forall t \in \mathbb{R} \text{ man konstruiere}}$ $S_t := (L - t \cdot \mathbf{Id})^{-1} \cdot det(L - t \cdot \mathbf{Id})$

$\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $I_t : TM^n \to \mathbb{R}, I_t(\xi) := g(S_t(\xi), \xi)$.

Satz (Topalov, M$\sim$ 1998):

Ist $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar g$, so sind $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ die Funktionen I_{t_i} kommutierende Integrale für den geodätischen Fluss von g (d.h. für die Hamiltonsche Funktion $H(\xi) := g(\xi, \xi)$)

Eine Funktion $I : TM \to \mathbb{R}$ ist ein Integral für g, wenn für jede Geodäte $c : \mathbb{R} \to M$ gilt: die Funktion $I(c(t), c'(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist konstant.

Gegeben sei $g,\ \bar g$ auf M^n $\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $L := \bar g^{-1} g \cdot \left(\frac{\det \bar g}{\det g}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

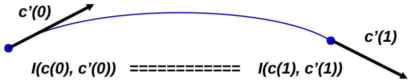
$\xrightarrow{\forall t \in \mathbb{R} \text{ man konstruiere}}$ $S_t := (L - t \cdot \mathbf{Id})^{-1} \cdot det(L - t \cdot \mathbf{Id})$

$\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $I_t : TM^n \to \mathbb{R}, I_t(\xi) := g(S_t(\xi), \xi)$.

Satz (Topalov, M$\sim$ 1998):

Ist $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar g$, so sind $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ die Funktionen I_{t_i} kommutierende Integrale für den geodätischen Fluss von g (d.h. für die Hamiltonsche Funktion $H(\xi) := g(\xi, \xi)$)

Eine Funktion $I : TM \to \mathbb{R}$ ist ein Integral für g, wenn für jede Geodäte $c : \mathbb{R} \to M$ gilt: die Funktion $I(c(t), c'(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist konstant.



Integrable Systemen in Theorie von geod. äquiv. Metriken

Gegeben sei g, $\bar g$ auf M^n $\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $L := \bar g^{-1} g \cdot \left(\frac{\det \bar g}{\det g}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

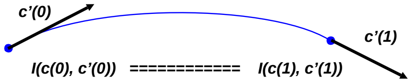
$\xrightarrow{\forall t \in \mathbb{R} \text{ man konstruiere}}$ $S_t := (L - t \cdot \mathbf{Id})^{-1} \cdot det(L - t \cdot \mathbf{Id})$

$\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $I_t : TM^n \to \mathbb{R},\ I_t(\xi) := g(S_t(\xi), \xi)$.

Satz (Topalov, M$\sim$ 1998):

Ist $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar g$, so sind $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ die Funktionen I_{t_i} kommutierende Integrale für den geodätischen Fluss von g (d.h. für die Hamiltonsche Funktion $H(\xi) := g(\xi, \xi)$)

Eine Funktion $I : TM \to \mathbb{R}$ ist ein Integral für g, wenn für jede Geodäte $c : \mathbb{R} \to M$ gilt: die Funktion $I(c(t), c'(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist konstant.



Solche integrablen Systeme wurden auch von Benenti, Braden, Ibort, Magri, Marmo,

Integrable Systemen in Theorie von geod. äquiv. Metriken

Gegeben sei g, $\bar g$ auf M^n $\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $L := \bar g^{-1} g \cdot \left(\frac{\det \bar g}{\det g}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

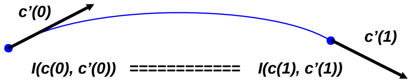
$\xrightarrow{\forall t \in \mathbb{R} \text{ man konstruiere}}$ $S_t := (L - t \cdot \mathbf{Id})^{-1} \cdot det(L - t \cdot \mathbf{Id})$

$\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $I_t : TM^n \to \mathbb{R}, I_t(\xi) := g(S_t(\xi), \xi)$.

Satz (Topalov, M$\sim$ 1998):

Ist $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar g$, so sind $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ die Funktionen I_{t_i} kommutierende Integrale für den geodätischen Fluss von g (d.h. für die Hamiltonsche Funktion $H(\xi) := g(\xi, \xi)$)

Eine Funktion $I : TM \to \mathbb{R}$ ist ein Integral für g, wenn für jede Geodäte $c : \mathbb{R} \to M$ gilt: die Funktion $I(c(t), c'(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist konstant.



Solche integrablen Systeme wurden auch von Benenti, Braden, Ibort, Magri, Marmo, Crampin, Sarlet, Tondo, Saunders, Cantrijn, Rastelli, Chanu, Marciniak, Ranada, Santander, Kiyohara, Smirnov, Horwood, Sergyeyev betrachtet

Integrable Systemen in Theorie von geod. äquiv. Metriken

Gegeben sei g, $\bar g$ auf M^n $\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $L := \bar g^{-1} g \cdot \left(\frac{\det \bar g}{\det g}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

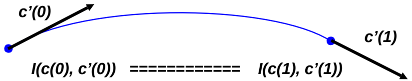
$\xrightarrow{\forall t \in \mathbb{R} \text{ man konstruiere}}$ $S_t := (L - t \cdot \mathbf{Id})^{-1} \cdot det(L - t \cdot \mathbf{Id})$

$\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $I_t : TM^n \to \mathbb{R}, I_t(\xi) := g(S_t(\xi), \xi)$.

Satz (Topalov, M$\sim$ 1998):

Ist $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar g$, so sind $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ die Funktionen I_{t_i} kommutierende Integrale für den geodätischen Fluss von g (d.h. für die Hamiltonsche Funktion $H(\xi) := g(\xi, \xi)$)

Eine Funktion $I : TM \to \mathbb{R}$ ist ein Integral für g, wenn für jede Geodäte $c : \mathbb{R} \to M$ gilt: die Funktion $I(c(t), c'(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist konstant.



Solche integrablen Systeme wurden auch von Benenti, Braden, Ibort, Magri, Marmo, Crampin, Sarlet, Tondo, Saunders, Cantrijn, Rastelli, Chanu, Marciniak, Ranada, Santander, Kiyohara, Smirnov, Horwood, Sergyeyev betrachtet

unter den Namen

Integrable Systemen in Theorie von geod. äquiv. Metriken

Gegeben sei g, $\bar g$ auf M^n $\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $L := \bar g^{-1} g \cdot \left(\frac{\det \bar g}{\det g}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

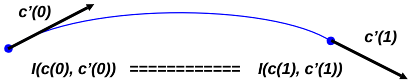
$\xrightarrow{\forall t \in \mathbb{R} \text{ man konstruiere}}$ $S_t := (L - t \cdot \mathbf{Id})^{-1} \cdot det(L - t \cdot \mathbf{Id})$

$\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $I_t : TM^n \to \mathbb{R}, I_t(\xi) := g(S_t(\xi), \xi)$.

Satz (Topalov, M$\sim$ 1998):

Ist $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar g$, so sind $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ die Funktionen I_{t_i} kommutierende Integrale für den geodätischen Fluss von g (d.h. für die Hamiltonsche Funktion $H(\xi) := g(\xi, \xi)$)

Eine Funktion $I : TM \to \mathbb{R}$ ist ein Integral für g, wenn für jede Geodäte $c : \mathbb{R} \to M$ gilt: die Funktion $I(c(t), c'(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist konstant.



Solche integrablen Systeme wurden auch von Benenti, Braden, Ibort, Magri, Marmo, Crampin, Sarlet, Tondo, Saunders, Cantrijn, Rastelli, Chanu, Marciniak, Ranada, Santander, Kiyohara, Smirnov, Horwood, Sergyeyev betrachtet

unter den Namen

Benenti-systems,

Integrable Systemen in Theorie von geod. äquiv. Metriken

Gegeben sei g, $\bar g$ auf M^n $\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $L := \bar g^{-1} g \cdot \left(\frac{\det \bar g}{\det g}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

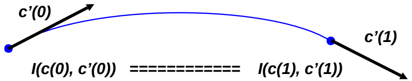
$\xrightarrow{\forall t \in \mathbb{R} \text{ man konstruiere}}$ $S_t := (L - t \cdot \mathbf{Id})^{-1} \cdot det(L - t \cdot \mathbf{Id})$

$\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $I_t : TM^n \to \mathbb{R}, I_t(\xi) := g(S_t(\xi), \xi)$.

Satz (Topalov, M$\sim$ 1998):

Ist $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar g$, so sind $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ die Funktionen I_{t_i} kommutierende Integrale für den geodätischen Fluss von g (d.h. für die Hamiltonsche Funktion $H(\xi) := g(\xi, \xi)$)

Eine Funktion $I : TM \to \mathbb{R}$ ist ein Integral für g, wenn für jede Geodäte $c : \mathbb{R} \to M$ gilt: die Funktion $I(c(t), c'(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist konstant.



Solche integrablen Systeme wurden auch von Benenti, Braden, Ibort, Magri, Marmo, Crampin, Sarlet, Tondo, Saunders, Cantrijn, Rastelli, Chanu, Marciniak, Ranada, Santander, Kiyohara, Smirnov, Horwood, Sergyeyev betrachtet

unter den Namen

Benenti-systems, L-systems,

Integrable Systemen in Theorie von geod. äquiv. Metriken

Gegeben sei g, $\bar g$ auf M^n $\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $L := \bar g^{-1} g \cdot \left(\frac{\det \bar g}{\det g}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

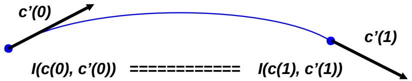
$\xrightarrow{\forall t \in \mathbb{R} \text{ man konstruiere}}$ $S_t := (L - t \cdot \mathbf{Id})^{-1} \cdot det(L - t \cdot \mathbf{Id})$

$\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $I_t : TM^n \to \mathbb{R}, I_t(\xi) := g(S_t(\xi), \xi)$.

Satz (Topalov, M$\sim$ 1998):

Ist $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar g$, so sind $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ die Funktionen I_{t_i} kommutierende Integrale für den geodätischen Fluss von g (d.h. für die Hamiltonsche Funktion $H(\xi) := g(\xi, \xi)$)

Eine Funktion $I : TM \to \mathbb{R}$ ist ein Integral für g, wenn für jede Geodäte $c : \mathbb{R} \to M$ gilt: die Funktion $I(c(t), c'(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist konstant.



Solche integrablen Systeme wurden auch von Benenti, Braden, Ibort, Magri, Marmo, Crampin, Sarlet, Tondo, Saunders, Cantrijn, Rastelli, Chanu, Marciniak, Ranada, Santander, Kiyohara, Smirnov, Horwood, Sergyeyev betrachtet

unter den Namen

Benenti-systems, L-systems, cofactor systems,

Integrable Systemen in Theorie von geod. äquiv. Metriken

Gegeben sei g, $\bar g$ auf M^n $\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $L := \bar g^{-1} g \cdot \left(\frac{\det \bar g}{\det g}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

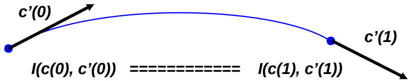
$\xrightarrow{\forall t \in \mathbb{R} \text{ man konstruiere}}$ $S_t := (L - t\cdot \mathbf{Id})^{-1} \cdot det(L - t \cdot \mathbf{Id})$

$\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $I_t : TM^n \to \mathbb{R}, I_t(\xi) := g(S_t(\xi), \xi)$.

Satz (Topalov, M$\sim$ 1998):

Ist $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar g$, so sind $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ die Funktionen I_{t_i} kommutierende Integrale für den geodätischen Fluss von g (d.h. für die Hamiltonsche Funktion $H(\xi) := g(\xi, \xi)$)

Eine Funktion $I : TM \to \mathbb{R}$ ist ein Integral für g, wenn für jede Geodäte $c : \mathbb{R} \to M$ gilt: die Funktion $I(c(t), c'(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist konstant.



Solche integrablen Systeme wurden auch von Benenti, Braden, Ibort, Magri, Marmo, Crampin, Sarlet, Tondo, Saunders, Cantrijn, Rastelli, Chanu, Marciniak, Ranada, Santander, Kiyohara, Smirnov, Horwood, Sergyeyev betrachtet

unter den Namen

Benenti-systems, L-systems, cofactor systems, quasi-bi-hamiltonian systems,

Integrable Systemen in Theorie von geod. äquiv. Metriken

Gegeben sei g, $\bar g$ auf M^n $\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $L := \bar g^{-1} g \cdot \left(\frac{\det \bar g}{\det g}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

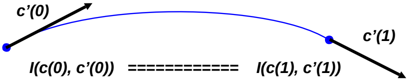
$\xrightarrow{\forall t \in \mathbb{R} \text{ man konstruiere}}$ $S_t := (L - t \cdot \mathbf{Id})^{-1} \cdot det(L - t \cdot \mathbf{Id})$

$\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $I_t : TM^n \to \mathbb{R}, I_t(\xi) := g(S_t(\xi), \xi)$.

Satz (Topalov, M$\sim$ 1998):

Ist $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar g$, so sind $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ die Funktionen I_{t_i} kommutierende Integrale für den geodätischen Fluss von g (d.h. für die Hamiltonsche Funktion $H(\xi) := g(\xi, \xi)$)

Eine Funktion $I : TM \to \mathbb{R}$ ist ein Integral für g, wenn für jede Geodäte $c : \mathbb{R} \to M$ gilt: die Funktion $I(c(t), c'(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist konstant.



Solche integrablen Systeme wurden auch von Benenti, Braden, Ibort, Magri, Marmo, Crampin, Sarlet, Tondo, Saunders, Cantrijn, Rastelli, Chanu, Marciniak, Ranada, Santander, Kiyohara, Smirnov, Horwood, Sergyeyev betrachtet

unter den Namen

Benenti-systems, L-systems, cofactor systems, quasi-bi-hamiltonian systems, systems admitting special conformal Killing tensor

Beweis der Folgerung 1:

Beweis der Folgerung 1:

(Ist $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ auf einer geschlossenen Fläche M^2 vom Geschlecht ≥ 2, so ist $g = konst \cdot \bar{g}$)

Beweis der Folgerung 1:

(Ist $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ auf einer geschlossenen Fläche M^2 vom Geschlecht ≥ 2, so ist $g = konst \cdot \bar{g}$)

In Dimension 2 ist das Integral I_0

Beweis der Folgerung 1:

(Ist $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ auf einer geschlossenen Fläche M^2 vom Geschlecht ≥ 2, so ist $g = konst \cdot \bar{g}$)

In Dimension 2 ist das Integral I_0

$$I_0(\xi) := \left(\frac{\det(g)}{\det(\bar{g})}\right)^{\frac{2}{3}} \bar{g}(\xi, \xi).$$

Beweis der Folgerung 1:

(Ist $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ auf einer geschlossenen Fläche M^2 vom Geschlecht ≥ 2, so ist $g = konst \cdot \bar{g}$)

In Dimension 2 ist das Integral I_0

$$I_0(\xi) := \left(\frac{\det(g)}{\det(\bar{g})}\right)^{\frac{2}{3}} \bar{g}(\xi, \xi).$$

Wegen der Eulercharakteristik gibt es ein x_0, sodass (nach Skalierung) $g_{|x_0} = \bar{g}_{|x_0}$.

Beweis der Folgerung 1:

(Ist $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ *auf einer geschlossenen Fläche* M^2 *vom Geschlecht* ≥ 2*, so ist* $g = konst \cdot \bar{g}$*)*

In Dimension 2 ist das Integral I_0

$$I_0(\xi) := \left(\frac{\det(g)}{\det(\bar{g})}\right)^{\frac{2}{3}} \bar{g}(\xi, \xi).$$

Wegen der Eulercharakteristik gibt es ein x_0, sodass (nach Skalierung) $g_{|x_0} = \bar{g}_{|x_0}$. Wir nehmen $g_{|x_1} \neq \bar{g}_{|x_1}$ für ein x_1 an und erhalten einen Widerspruch.

Beweis für beliebige Dimension

Beweis für beliebige Dimension

- Man betrachtet die „Levi-Civita“ Blätterungen $B_1, \ldots, B_m$ und zeigt, dass die singulären Punkte in Untermannigfaltigkeiten von Codimension ≥ 2 angeordnet sind

Beweis für beliebige Dimension

- Man betrachtet die „Levi-Civita“ Blätterungen $B_1, \ldots, B_m$ und zeigt, dass die singulären Punkte in Untermannigfaltigkeiten von Codimension ≥ 2 angeordnet sind

  (Methoden: Trick und Analysis)

Beweis für beliebige Dimension

- Man betrachtet die „Levi-Civita“ Blätterungen $B_1, \ldots, B_m$ und zeigt, dass die singulären Punkte in Untermannigfaltigkeiten von Codimension ≥ 2 angeordnet sind

  (Methoden: Trick und Analysis)

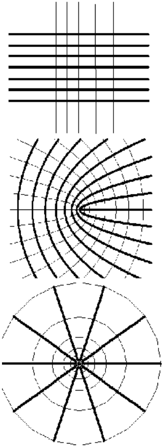
- Man beschreibe die Blätterung in der Nähe der singulären Punkte (bis auf blätterungserhaltende Homöomorphismen). Es gibt endlich viele „Bausteine“.

Beweis für beliebige Dimension

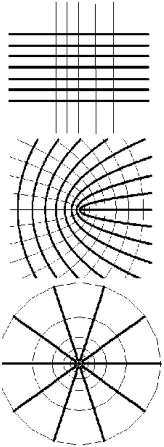
- Man betrachtet die „Levi-Civita“ Blätterungen $B_1, \ldots, B_m$ und zeigt, dass die singulären Punkte in Untermannigfaltigkeiten von Codimension ≥ 2 angeordnet sind

  (Methoden: Trick und Analysis)

- Man beschreibe die Blätterung in der Nähe der singulären Punkte (bis auf blätterungserhaltende Homöomorphismen). Es gibt endlich viele „Bausteine“.



Beweis für beliebige Dimension



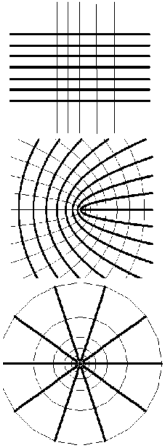
- Man betrachtet die „Levi-Civita“ Blätterungen $B_1, \ldots, B_m$ und zeigt, dass die singulären Punkte in Untermannigfaltigkeiten von Codimension ≥ 2 angeordnet sind

  (Methoden: Trick und Analysis)

- Man beschreibe die Blätterung in der Nähe der singulären Punkte (bis auf blätterungserhaltende Homöomorphismen). Es gibt endlich viele „Bausteine“.

  (Methoden: Trick, Analysis und Topologie)

Beweis für beliebige Dimension



- Man betrachtet die „Levi-Civita“ Blätterungen $B_1, \ldots, B_m$ und zeigt, dass die singulären Punkte in Untermannigfaltigkeiten von Codimension ≥ 2 angeordnet sind

  (Methoden: Trick und Analysis)

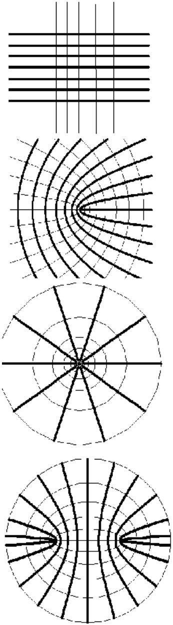
- Man beschreibe die Blätterung in der Nähe der singulären Punkte (bis auf blätterungserhaltende Homöomorphismen). Es gibt endlich viele „Bausteine“.

  (Methoden: Trick, Analysis und Topologie)

- Man klebt die „Bausteine“ zusammen.

  (Methoden: Topologie)

Beweis für beliebige Dimension



- Man betrachtet die „Levi-Civita“ Blätterungen $B_1, \ldots, B_m$ und zeigt, dass die singulären Punkte in Untermannigfaltigkeiten von Codimension ≥ 2 angeordnet sind

  (Methoden: Trick und Analysis)

- Man beschreibe die Blätterung in der Nähe der singulären Punkte (bis auf blätterungserhaltende Homöomorphismen). Es gibt endlich viele „Bausteine“.

  (Methoden: Trick, Analysis und Topologie)

- Man klebt die „Bausteine“ zusammen.

  (Methoden: Topologie)

Die infinitesimale Version des Problems von Beltrami: das 2. Problem von Lie

Die infinitesimale Version des Problems von Beltrami: das 2. Problem von Lie

Lie  1882: *Man soll die Form des Bogenelementes einer jeden Fläche bestimmen, deren geodätische Kurven mehrere infinitesimale Transformationen gestatten.*

Die infinitesimale Version des Problems von Beltrami: das 2. Problem von Lie

Lie  1882: *Man soll die Form des Bogenelementes einer jeden Fläche bestimmen, deren geodätische Kurven mehrere infinitesimale Transformationen gestatten.*

Übersetzung: Man soll alle 2-dim Metriken beschreiben, die mind. 2 projektive Vektorfelder gestatten.

Die infinitesimale Version des Problems von Beltrami: das 2. Problem von Lie

Lie  1882: *Man soll die Form des Bogenelementes einer jeden Fläche bestimmen, deren geodätische Kurven mehrere infinitesimale Transformationen gestatten.*

Übersetzung: Man soll alle 2-dim Metriken beschreiben, die mind. 2 projektive Vektorfelder gestatten.

Def. Ein Vektorfeld auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist projektiv, falls dessen Fluss die (nichtparametrisierten) Geodäten erhält.

Die infinitesimale Version des Problems von Beltrami: das 2. Problem von Lie

Lie  1882: *Man soll die Form des Bogenelementes einer jeden Fläche bestimmen, deren geodätische Kurven mehrere infinitesimale Transformationen gestatten.*

Übersetzung: Man soll alle 2-dim Metriken beschreiben, die mind. 2 projektive Vektorfelder gestatten.

Def. Ein Vektorfeld auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist projektiv, falls dessen Fluss die (nichtparametrisierten) Geodäten erhält.

Bsp: Die (flache) Ebene und die (runde) Sphäre haben eine 8-dimensionale Lie-Algebra ($sl(3)$) von projektiven Vektorfeldern

Die infinitesimale Version des Problems von Beltrami: das 2. Problem von Lie

Lie  1882: *Man soll die Form des Bogenelementes einer jeden Fläche bestimmen, deren geodätische Kurven mehrere infinitesimale Transformationen gestatten.*

Übersetzung: Man soll alle 2-dim Metriken beschreiben, die mind. 2 projektive Vektorfelder gestatten.

Def. Ein Vektorfeld auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist projektiv, falls dessen Fluss die (nichtparametrisierten) Geodäten erhält.

Bsp: Die (flache) Ebene und die (runde) Sphäre haben eine 8-dimensionale Lie-Algebra ($sl(3)$) von projektiven Vektorfeldern (Beispiel von Beltrami).

Satz (Bryant, Manno, M$\sim$) 2007:

Satz (Bryant, Manno, M$\sim$) 2007: *Hat eine Fläche* (M^2, g) *von nichtkonstanter Krümmung mind. 2 linear unabhängige projektive Vektorfelder, so gibt es Koordinaten in der Umgebung von fast jedem Punkt, sodass die Metrik* g *wie unten ist:*

Satz (Bryant, Manno, M∼) 2007: *Hat eine Fläche (M^2, g) von nichtkonstanter Krümmung mind. 2 linear unabhängige projektive Vektorfelder, so gibt es Koordinaten in der Umgebung von fast jedem Punkt, sodass die Metrik g wie unten ist:*

1. Zwei projektive Vektorfelder:

   1.1 $\varepsilon_1 e^{(b+2)x}\, dx^2 + \varepsilon_2 e^{bx}\, dy^2$, wobei $b \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1\}$ und $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ Konstanten sind,

   1.2 $a\left(\frac{e^{(b+2)x}dx^2}{(e^{bx}+\varepsilon_2)^2} + \varepsilon_1 \frac{e^{bx}dy^2}{e^{bx}+\varepsilon_2}\right)$, wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1\}$, und $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ Konstanten sind, und

   1.3 $a\left(\frac{e^{2x}dx^2}{x^2} + \varepsilon \frac{dy^2}{x}\right)$, wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, und $\varepsilon \in \{1, -1\}$ Konstanten sind.

2. Drei projektive Vektorfelder:

   2.1 $\varepsilon_1 e^{3x} dx^2 + \varepsilon_2 e^{x} dy^2$, wobei $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ Konstanten sind,

   2.2 $a\left(\frac{e^{3x}dx^2}{(e^x+\varepsilon_2)^2} + \varepsilon_1 \frac{e^x dy^2}{(e^x+\varepsilon_2)}\right)$, wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ Konstanten sind, und

   2.3 $a\left(\frac{dx^2}{(cx+2x^2+\varepsilon_2)^2 x} + \varepsilon_1 \frac{x dy^2}{(cx+2x^2+\varepsilon_2)}\right)$, wobei $a > 0$, $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, $c \in \mathbb{R}$ Konstanten sind.

Das Problem von Schouten und dessen Motivation

Das Problem von Schouten und dessen Motivation

Schouten  1924: *Man soll alle vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten beschreiben, deren kontinuierliche Gruppe von Geodäten-erhaltenden Transformationen grösser ist als die Gruppe der Isometrien*

Das Problem von Schouten und dessen Motivation

Schouten  1924: *Man soll alle vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten beschreiben, deren kontinuierliche Gruppe von Geodäten-erhaltenden Transformationen grösser ist als die Gruppe der Isometrien*

Klein  :**Erlanger Programm 1872**:

Das Problem von Schouten und dessen Motivation

Schouten  1924: *Man soll alle vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten beschreiben, deren kontinuierliche Gruppe von Geodäten-erhaltenden Transformationen grösser ist als die Gruppe der Isometrien*

Klein  :**Erlanger Programm 1872**: Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben; man soll die der Mannigfaltigkeit angehörigen Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften untersuchen, die durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden.

Das Problem von Schouten und dessen Motivation

Schouten  1924: *Man soll alle vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten beschreiben, deren kontinuierliche Gruppe von Geodäten-erhaltenden Transformationen grösser ist als die Gruppe der Isometrien*

Klein  :**Erlanger Programm 1872**: Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben; man soll die der Mannigfaltigkeit angehörigen Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften untersuchen, die durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden.

4. Problem von Hilbert  1900:

Das Problem von Schouten und dessen Motivation

Schouten  1924: *Man soll alle vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten beschreiben, deren kontinuierliche Gruppe von Geodäten-erhaltenden Transformationen grösser ist als die Gruppe der Isometrien*

Klein  :**Erlanger Programm 1872**: Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben; man soll die der Mannigfaltigkeit angehörigen Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften untersuchen, die durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden.

4. Problem von Hilbert  1900: Wie lassen sich die Metriken charakterisieren, in denen alle Geraden Geodäten sind?

Lösung des Problems von Schouten

Lösung des Problems von Schouten

Ich habe (2005) die Vermutung von Lichnerowicz  **bewiesen:**

Jede vollständige einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren zusammenhängende Lie-Gruppe von Geodäten-erhaltenden Transformationen grösser ist als die Gruppe der affinen Transformationen, ist isometrisch zu einer runden Sphäre.

Lösung des Problems von Schouten

Ich habe (2005) die Vermutung von Lichnerowicz  **bewiesen:**

> *Jede vollständige einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren zusammenhängende Lie-Gruppe von Geodäten-erhaltenden Transformationen grösser ist als die Gruppe der affinen Transformationen, ist isometrisch zu einer runden Sphäre.*

Lösung des Problems von Schouten

Ich habe (2005) die Vermutung von Lichnerowicz  **bewiesen:**

Jede vollständige einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren zusammenhängende Lie-Gruppe von Geodäten-erhaltenden Transformationen grösser ist als die Gruppe der affinen Transformationen, ist isometrisch zu einer runden Sphäre.

Frankreich (Lichnerowicz)	

Lösung des Problems von Schouten

Ich habe (2005) die Vermutung von Lichnerowicz  **bewiesen:**

Jede vollständige einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren zusammenhängende Lie-Gruppe von Geodäten-erhaltenden Transformationen grösser ist als die Gruppe der affinen Transformationen, ist isometrisch zu einer runden Sphäre.

Frankreich (Lichnerowicz)	Japan (Yano, Obata, Tanno)	

Lösung des Problems von Schouten

Ich habe (2005) die Vermutung von Lichnerowicz  **bewiesen:**

Jede vollständige einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren zusammenhängende Lie-Gruppe von Geodäten-erhaltenden Transformationen grösser ist als die Gruppe der affinen Transformationen, ist isometrisch zu einer runden Sphäre.

Frankreich (Lichnerowicz)	Japan (Yano, Obata, Tanno)	Sowjetunion (Raschewskii)

Lösung des Problems von Schouten

Ich habe (2005) die Vermutung von Lichnerowicz  **bewiesen:**

Jede vollständige einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren zusammenhängende Lie-Gruppe von Geodäten-erhaltenden Transformationen grösser ist als die Gruppe der affinen Transformationen, ist isometrisch zu einer runden Sphäre.

Frankreich (Lichnerowicz)	Japan (Yano, Obata, Tanno)	Sowjetunion (Raschewskii)
Couty (1961) hat die Vermutung unter der Annahme bewiesen, dass g Einstein oder Kähler ist.		

Lösung des Problems von Schouten

Ich habe (2005) die Vermutung von Lichnerowicz  **bewiesen:**

Jede vollständige einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren zusammenhängende Lie-Gruppe von Geodäten-erhaltenden Transformationen grösser ist als die Gruppe der affinen Transformationen, ist isometrisch zu einer runden Sphäre.

Frankreich (Lichnerowicz)	Japan (Yano, Obata, Tanno)	Sowjetunion (Raschewskii)
Couty (1961) hat die Vermutung unter der Annahme bewiesen, dass g Einstein oder Kähler ist.	Yamauchi (1974) hat die Vermutung unter der Annahme bewiesen, dass die Skalarkrümmung konstant ist.	

Lösung des Problems von Schouten

Ich habe (2005) die Vermutung von Lichnerowicz  **bewiesen:**

Jede vollständige einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren zusammenhängende Lie-Gruppe von Geodäten-erhaltenden Transformationen grösser ist als die Gruppe der affinen Transformationen, ist isometrisch zu einer runden Sphäre.

Frankreich (Lichnerowicz)	Japan (Yano, Obata, Tanno)	Sowjetunion (Raschewskii)
Couty (1961) hat die Vermutung unter der Annahme bewiesen, dass g Einstein oder Kähler ist.	Yamauchi (1974) hat die Vermutung unter der Annahme bewiesen, dass die Skalarkrümmung konstant ist.	Solodovnikov (1956) hat die Vermutung unter den Annahmen bewiesen, dass

Lösung des Problems von Schouten

Ich habe (2005) die Vermutung von Lichnerowicz  **bewiesen:**

Jede vollständige einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren zusammenhängende Lie-Gruppe von Geodäten-erhaltenden Transformationen grösser ist als die Gruppe der affinen Transformationen, ist isometrisch zu einer runden Sphäre.

Frankreich (Lichnerowicz)	Japan (Yano, Obata, Tanno)	Sowjetunion (Raschewskii)
Couty (1961) hat die Vermutung unter der Annahme bewiesen, dass g Einstein oder Kähler ist.	Yamauchi (1974) hat die Vermutung unter der Annahme bewiesen, dass die Skalarkrümmung konstant ist.	Solodovnikov (1956) hat die Vermutung unter den Annahmen bewiesen, dass ▶ alles reell-analytisch ist,

Lösung des Problems von Schouten

Ich habe (2005) die Vermutung von Lichnerowicz  **bewiesen:**

Jede vollständige einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren zusammenhängende Lie-Gruppe von Geodäten-erhaltenden Transformationen grösser ist als die Gruppe der affinen Transformationen, ist isometrisch zu einer runden Sphäre.

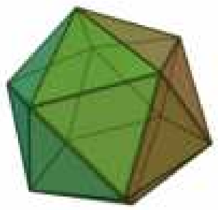
Frankreich (Lichnerowicz)	Japan (Yano, Obata, Tanno)	Sowjetunion (Raschewskii)
Couty (1961) hat die Vermutung unter der Annahme bewiesen, dass g Einstein oder Kähler ist.	Yamauchi (1974) hat die Vermutung unter der Annahme bewiesen, dass die Skalarkrümmung konstant ist.	Solodovnikov (1956) hat die Vermutung unter den Annahmen bewiesen, dass ▶ alles reell-analytisch ist, ▶ und $n \geq 3$.

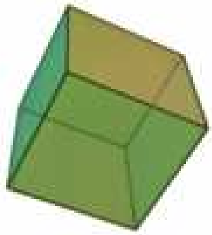
Themawechsel: Polyedrische 3-Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativer Krümmung (mit Shevchishin)

Themawechsel: Polyedrische 3-Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativer Krümmung (mit Shevchishin)

Themawechsel: Polyedrische 3-Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativer Krümmung (mit Shevchishin)

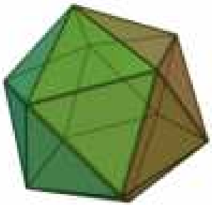
Polyeder = konvexe Hülle von endlich viel Punkten in $\mathbb{R}^3$ mit der induzierten Metrik (= Abstand-Funktion)

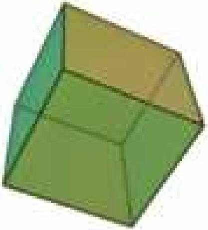




Themawechsel: Polyedrische 3-Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativer Krümmung (mit Shevchishin)

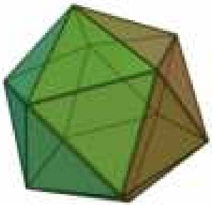
Polyeder = konvexe Hülle von endlich viel Punkten in $\mathbb{R}^3$ mit der induzierten Metrik (= Abstand-Funktion)

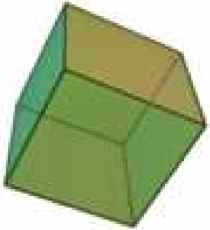




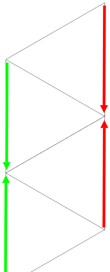
Themawechsel: Polyedrische 3-Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativer Krümmung (mit Shevchishin)

Polyeder = konvexe Hülle von endlich viel Punkten in $\mathbb{R}^3$ mit der induzierten Metrik (= Abstand-Funktion)



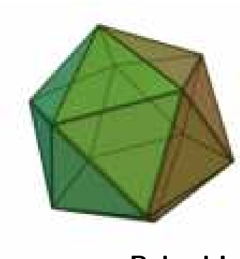


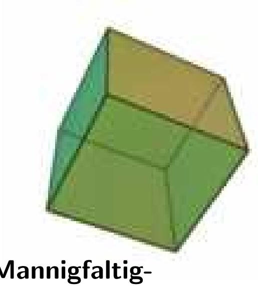
Polyedrische Mannigfaltigkeit =



Themawechsel: Polyedrische 3-Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativer Krümmung (mit Shevchishin)

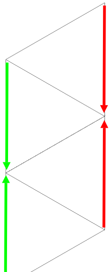
Polyeder $=$ konvexe Hülle von endlich viel Punkten in $\mathbb{R}^3$ mit der induzierten Metrik ($=$ Abstand-Funktion)





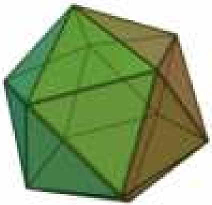
Polyedrische Mannigfaltigkeit $=$

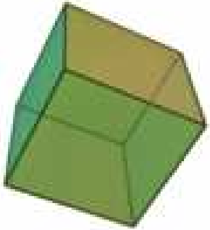
- geschlossene 3-Mannigfaltigkeit



Themawechsel: Polyedrische 3-Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativer Krümmung (mit Shevchishin)

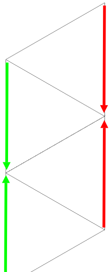
Polyeder $=$ konvexe Hülle von endlich viel Punkten in $\mathbb{R}^3$ mit der induzierten Metrik ($=$ Abstand-Funktion)





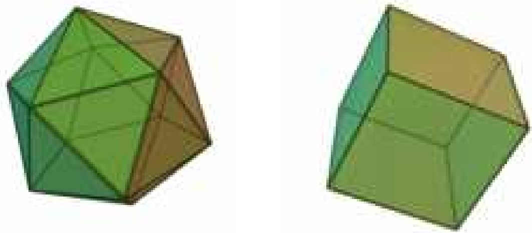
Polyedrische Mannigfaltigkeit $=$

- geschlossene 3-Mannigfaltigkeit
- die aus Polyedern geklebt ist



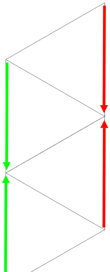
Themawechsel: Polyedrische 3-Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativer Krümmung (mit Shevchishin)

Polyeder = konvexe Hülle von endlich viel Punkten in $\mathbb{R}^3$ mit der induzierten Metrik (= Abstand-Funktion)



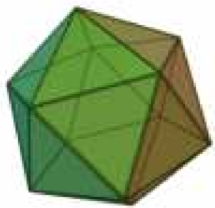
Polyedrische Mannigfaltigkeit =

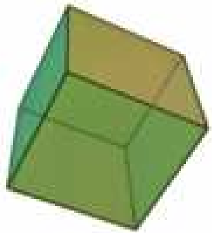
- geschlossene 3-Mannigfaltigkeit
- die aus Polyedern geklebt ist
- sodass die Verklebungsabbildungen isometrisch sind

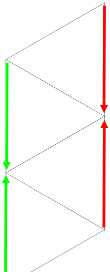


Themawechsel: Polyedrische 3-Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativer Krümmung (mit Shevchishin)

Polyeder = konvexe Hülle von endlich viel Punkten in $\mathbb{R}^3$ mit der induzierten Metrik (= Abstand-Funktion)





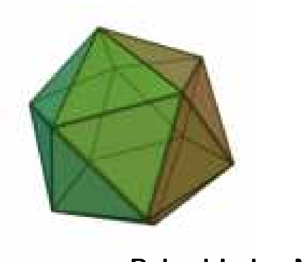


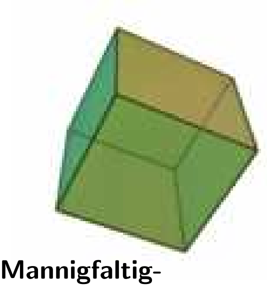
Polyedrische Mannigfaltigkeit =

- geschlossene 3-Mannigfaltigkeit
- die aus Polyedern geklebt ist
- sodass die Verklebungsabbildungen isometrisch sind

Themawechsel: Polyedrische 3-Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativer Krümmung (mit Shevchishin)

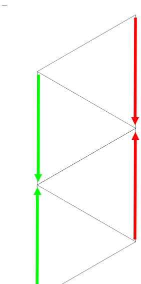
Polyeder = konvexe Hülle von endlich viel Punkten in $\mathbb{R}^3$ mit der induzierten Metrik (= Abstand-Funktion)





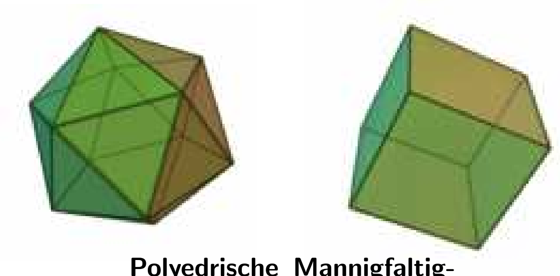
Polyedrische Mannigfaltigkeit =

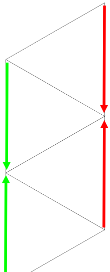
- geschlossene 3-Mannigfaltigkeit
- die aus Polyedern geklebt ist
- sodass die Verklebungsabbildungen isometrisch sind



Themawechsel: Polyedrische 3-Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativer Krümmung (mit Shevchishin)

Polyeder = konvexe Hülle von endlich viel Punkten in $\mathbb{R}^3$ mit der induzierten Metrik (= Abstand-Funktion)





Polyedrische Mannigfaltigkeit =

- geschlossene 3-Mannigfaltigkeit
- die aus Polyedern geklebt ist
- sodass die Verklebungsabbildungen isometrisch sind

Polyedrische Mannigfaltigkeit hat nichtnegative Alexandrov-Krümmung:

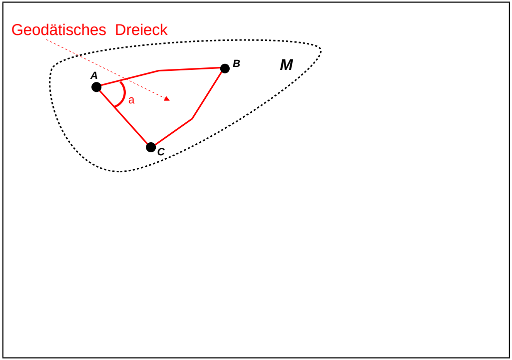
□

Polyedrische Mannigfaltigkeit hat nichtnegative Alexandrov-Krümmung:

Geometrische Definition: $\square$

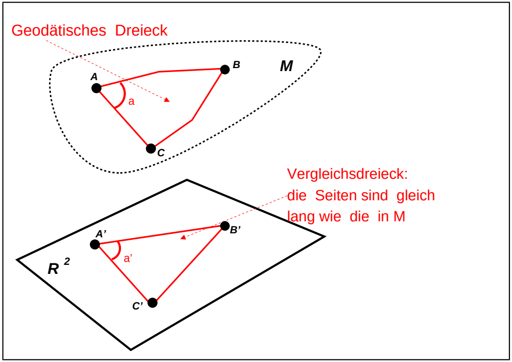
Polyedrische Mannigfaltigkeit hat nichtnegative Alexandrov-Krümmung:

Geometrische Definition:



Polyedrische Mannigfaltigkeit hat nichtnegative Alexandrov-Krümmung:

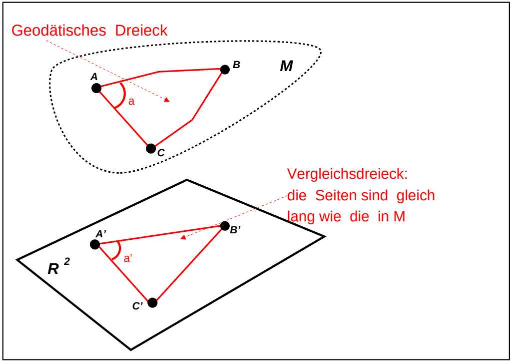
Geometrische Definition:



Def: $K \geq 0 \iff a \geq a'$
(für alle geodätische Dreiecke)

Polyedrische Mannigfaltigkeit hat nichtnegative Alexandrov-Krümmung:

Geometrische Definition:



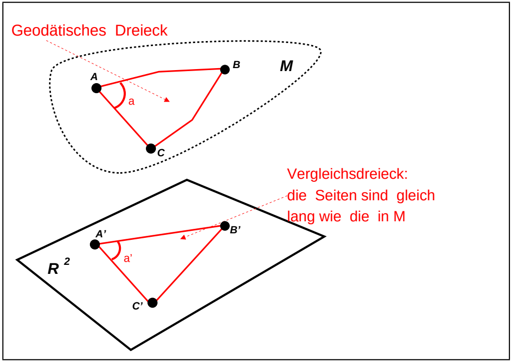
Def: $K \geq 0 \iff a \geq a'$
(für alle geodätische Dreiecke)

Kombinatorische Definition:

(Milka 1968)

Polyedrische Mannigfaltigkeit hat nichtnegative Alexandrov-Krümmung:

Geometrische Definition:



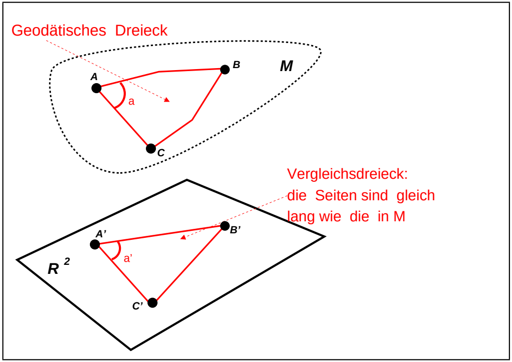
Def: $K \geq 0 \iff a \geq a'$
(für alle geodätische Dreiecke)

Kombinatorische Definition: (Milka 1968)

für jede Kante ist die Summe der dihedralen Winkel um die Kante $\leq 2\pi$.

Polyedrische Mannigfaltigkeit hat nichtnegative Alexandrov-Krümmung:

Geometrische Definition:



Def: $K \geq 0 \iff a \geq a'$
(für alle geodätische Dreiecke)

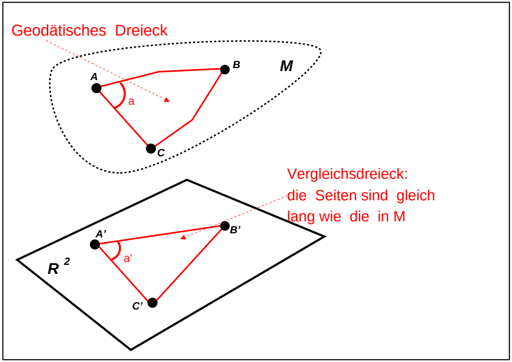
Kombinatorische Definition:

(Milka 1968)

für jede Kante ist die Summe der dihedralen Winkel um die Kante $\leq 2\pi$.

Polyedrische Mannigfaltigkeit hat nichtnegative Alexandrov-Krümmung:

Geometrische Definition:



Def: $K \geq 0 \iff a \geq a'$
(für alle geodätische Dreiecke)

Kombinatorische Definition:

(Milka 1968)

für jede Kante ist die Summe der dihedralen Winkel um die Kante $\leq 2\pi$.

Äquivalenz von Definitionen: Toponogov Globalisation Theorem: (Burago-Gromov-Perelman 1992)

Bsp:

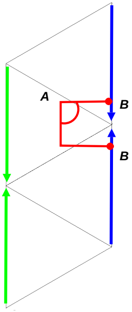
$\square$

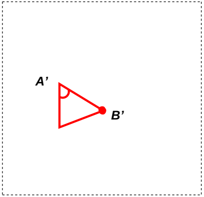
Bsp: Oberfläche eines (n+1)-Polyeders ist eine polyedrische n-Mannigfaltigkeit mit $K \geq 0$.

$\square$

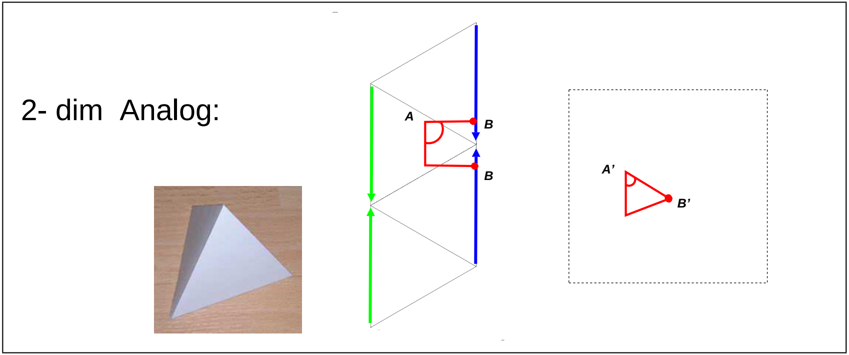
Bsp: Oberfläche eines (n+1)-Polyeders ist eine polyedrische n-Mannigfaltigkeit mit $K \geq 0$.

2- dim Analog:





Bsp: Oberfläche eines (n+1)-Polyeders ist eine polyedrische n-Mannigfaltigkeit mit $K \geq 0$.



In dim $n \geq 3$ kann man polyedrische n-Mannigfaltigkeiten mit $K \geq 0$ konstruieren, die zur Oberfläche keines (n+1)-Polyeders isometrisch sind.

Hauptsatz (Shevchishin, M∼ 2006)

Hauptsatz (Shevchishin, M$\sim$ 2006)

(M^3, d) polyedrisch, $K \geq 0$.

Hauptsatz (Shevchishin, M$\sim$ 2006)

(M^3, d) polyedrisch, $K \geq 0$.

Dann: $\forall \varepsilon > 0 \; \forall 0 \leq s < 1$

Hauptsatz (Shevchishin, M$\sim$ 2006)

(M^3, d) polyedrisch, $K \geq 0$.

Dann: $\forall \varepsilon > 0 \; \forall 0 \leq s < 1$

$\exists$ eine glatte Struktur und eine Riemannsche Metrik g mit nicht-negativer Schnittkrümmung auf M^3, sodass

Hauptsatz (Shevchishin, M∼ 2006)

(M^3, d) polyedrisch, $K \geq 0$.

Dann: $\forall \varepsilon > 0 \ \forall 0 \leq s < 1$
$\exists$ eine glatte Struktur und eine Riemannsche Metrik g mit nicht-negativer Schnittkrümmung auf M^3, sodass

(i) (M^3, d_g) ist Gromov-Hausdorff-ε-nahe zu (M^3, d).

Hauptsatz (Shevchishin, M∼ 2006)

(M^3, d) polyedrisch, $K \geq 0$.

Dann: $\forall \varepsilon > 0\ \forall 0 \leq s < 1$
$\exists$ eine glatte Struktur und eine Riemannsche Metrik g mit nicht-negativer Schnittkrümmung auf M^3, sodass

(i) (M^3, d_g) ist Gromov-Hausdorff-ε-nahe zu (M^3, d).

Abstand $d_g(x, y)$ auf einer Riemannschen (M, g) ist

$$d_g(x, y) = \inf \left\{ L(\gamma) \ : \ \begin{array}{l}\gamma \text{ ist eine glatte} \\ \text{Kurve, die } x \text{ und} \\ y \text{ verbindet}\end{array} \right\},$$

wobei $L(\gamma) = \displaystyle\int_a^b \|\gamma'(t)\|\, \mathrm{d}t.$

für $\gamma : [a, b] \to M$.

Hauptsatz (Shevchishin, M∼ 2006)

(M^3, d) polyedrisch, $K \geq 0$.

Dann: $\forall \varepsilon > 0$ $\forall 0 \leq s < 1$
$\exists$ eine glatte Struktur und eine Riemannsche Metrik g mit nicht-negativer Schnittkrümmung auf M^3, sodass

(i) (M^3, d_g) ist Gromov-Hausdorff-ε-nahe zu (M^3, d).

(ii) (M^3, d_g) ist ε-nahe zu (M^3, d) in der C^0-Topologie.

Abstand $d_g(x, y)$ auf einer Riemannschen (M, g) ist

$$d_g(x, y) = \inf \left\{ L(\gamma) \ : \ \begin{array}{l} \gamma \text{ ist eine glatte} \\ \text{Kurve, die } x \text{ und} \\ y \text{ verbindet} \end{array} \right\},$$

wobei $L(\gamma) = \displaystyle\int_a^b \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t.$

für $\gamma : [a, b] \to M$.

Hauptsatz (Shevchishin, M$\sim$ 2006)

(M^3, d) polyedrisch, $K \geq 0$.

Dann: $\forall \varepsilon > 0\ \forall 0 \leq s < 1$
$\exists$ eine glatte Struktur und eine Riemannsche Metrik g mit nicht-negativer Schnittkrümmung auf M^3, sodass

(i) (M^3, d_g) ist Gromov-Hausdorff-ε-nahe zu (M^3, d).

(ii) (M^3, d_g) ist ε-nahe zu (M^3, d) in der C^0-Topologie.

(iii) (M^3, d_g) ist ε-nahe zu (M^3, d) in der H^s-Topologie ($s-$Gromov-Hölder).

Abstand $d_g(x, y)$ auf einer Riemannschen (M, g) ist

$$d_g(x, y) = \inf \left\{ L(\gamma) \ : \ \begin{array}{l}\gamma \text{ ist eine glatte} \\ \text{Kurve, die } x \text{ und} \\ y \text{ verbindet}\end{array} \right\},$$

wobei $L(\gamma) = \displaystyle\int_a^b \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t.$

für $\gamma : [a, b] \to M$.

Hauptsatz (Shevchishin, M$\sim$ 2006)

(M^3, d) polyedrisch, $K \geq 0$.

Dann: $\forall \varepsilon > 0 \ \forall 0 \leq s < 1$
$\exists$ eine glatte Struktur und eine Riemannsche Metrik g mit nicht-negativer Schnittkrümmung auf M^3, sodass

(i) (M^3, d_g) ist Gromov-Hausdorff-ε-nahe zu (M^3, d).

$\Uparrow$ $\Uparrow$

(ii) (M^3, d_g) ist ε-nahe zu (M^3, d) in der C^0-Topologie.

$\Uparrow$ $\Uparrow$

(iii) (M^3, d_g) ist ε-nahe zu (M^3, d) in der H^s-Topologie ($s-$Gromov-Hölder).

Abstand $d_g(x, y)$ auf einer Riemannschen (M, g) ist

$$d_g(x, y) = \inf \left\{ L(\gamma) \ : \ \begin{array}{l} \gamma \text{ ist eine glatte} \\ \text{Kurve, die } x \text{ und} \\ y \text{ verbindet} \end{array} \right\},$$

wobei $L(\gamma) = \displaystyle\int_a^b \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t.$

für $\gamma : [a, b] \to M$.

Hauptsatz (Shevchishin, M∼ 2006)

(M^3, d) polyedrisch, $K \geq 0$.

Dann: $\forall \varepsilon > 0 \ \forall 0 \leq s < 1$
$\exists$ eine glatte Struktur und eine Riemannsche Metrik g mit nicht-negativer Schnittkrümmung auf M^3, sodass

(ii) $\iff$ $\exists$ glatte Riemannsche $(\widetilde{M}^3, g)$ und ein Homöomorphismus $\phi : M^3 \to \widetilde{M}^3$, sodass $\forall x, y \in M^3$ $|d(x,y) - d_g(\phi(x), \phi(y))| < \varepsilon$

(ii) (M^3, d_g) ist ε-nahe zu (M^3, d) in der C^0-Topologie.

Hauptsatz (Shevchishin, M$\sim$ 2006)

(M^3, d) polyedrisch, $K \geq 0$.

Dann: $\forall \varepsilon > 0 \ \forall 0 \leq s < 1$ $\exists$ eine glatte Struktur und eine Riemannsche Metrik g mit nicht-negativer Schnittkrümmung auf M^3, sodass

(ii) (M^3, d_g) ist ε-nahe zu (M^3, d) in der C^0-Topologie.

Eine Kante ist **wesentlich**, falls die Summe der dihedralen Winkel um die Kante $< 2\pi$.

Hauptsatz (Shevchishin, M∼ 2006)

(M^3, d) polyedrisch, $K \geq 0$.

Dann: $\forall \varepsilon > 0$ $\forall 0 \leq s < 1$
$\exists$ eine glatte Struktur und eine Riemannsche Metrik g mit nicht-negativer Schnittkrümmung auf M^3, sodass

(ii) (M^3, d_g) ist ε-nahe zu (M^3, d) in der C^0-Topologie.

Eine Kante ist **wesentlich**, falls die Summe der dihedralen Winkel um die Kante $< 2\pi$. Eine Ecke ist **wesentlich**, falls sie ein Endpunkt von mind. 3 wesentlichen Kanten ist.

Hauptsatz (Shevchishin, M$\sim$ 2006)

(M^3, d) polyedrisch, $K \geq 0$.

Dann: $\forall \varepsilon > 0 \ \forall 0 \leq s < 1$
$\exists$ eine glatte Struktur und eine Riemannsche Metrik g mit nicht-negativer Schnittkrümmung auf M^3, sodass

(ii) (M^3, d_g) ist ε-nahe zu (M^3, d) in der C^0-Topologie.

Eine Kante ist **wesentlich**, falls die Summe der dihedralen Winkel um die Kante $< 2\pi$. Eine Ecke ist **wesentlich**, falls sie ein Endpunkt von mind. 3 wesentlichen Kanten ist.

(iv) Gibt es eine wesentliche Ecke, so kann man die Metrik g so wählen, dass sie positive Schnittkrümmung hat.

Geometrische Motivation:

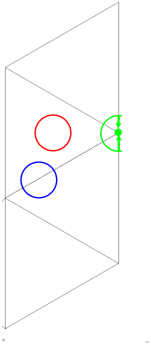
Geometrische Motivation:

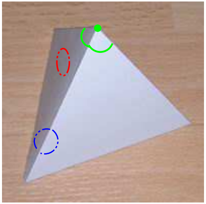
(Alexandrov, Gauss) In Dimension 2 gilt der Hauptsatz (bzw. Analogon davon):

□

Geometrische Motivation:

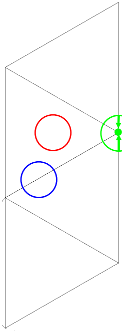
(Alexandrov, Gauss) In Dimension 2 gilt der Hauptsatz (bzw. Analogon davon): Die Metrik in der roten und in der blauen Umgebungen ist bereits Riemannsch:

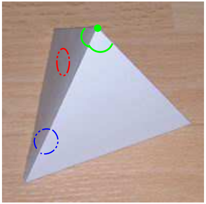




Geometrische Motivation:

(Alexandrov, Gauss) In Dimension 2 gilt der Hauptsatz (bzw. Analogon davon): Die Metrik in der roten und in der blauen Umgebungen ist bereits Riemannsch:



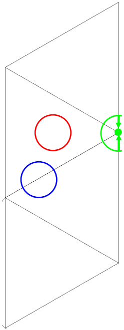


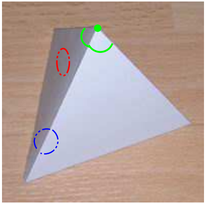
Die Metrik in der grünen Umgebung ist isometrisch zu der Metrik in der Umgebung der Spitze des Kegels

□

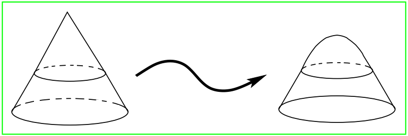
Geometrische Motivation:

(Alexandrov, Gauss) In Dimension 2 gilt der Hauptsatz (bzw. Analogon davon): Die Metrik in der roten und in der blauen Umgebungen ist bereits Riemannsch:





Die Metrik in der grünen Umgebung ist isometrisch zu der Metrik in der Umgebung der Spitze des Kegels und kann zu einer „Kappe“ abgerundet werden.



Topologische Motivation

Topologische Motivation

Polyedrische Mannigfaltigkeiten mit $K \leq 0$ sind für die Untersuchung von hyperbolischen Mannigfaltigkeiten wichtig.

Topologische Motivation

Polyedrische Mannigfaltigkeiten mit $K \leq 0$ sind für die Untersuchung von hyperbolischen Mannigfaltigkeiten wichtig. (Effektive Konstruktionsmethoden, Mannigfaltigkeiten mit minimalem Volumen, etc.) **(Thurston, S. Matveev, Freedman)**

Topologische Motivation

Polyedrische Mannigfaltigkeiten mit $K \leq 0$ sind für die Untersuchung von hyperbolischen Mannigfaltigkeiten wichtig. (Effektive Konstruktionsmethoden, Mannigfaltigkeiten mit minimalem Volumen, etc.) **(Thurston, S. Matveev, Freedman)**

Existenz von Riemannschen Metriken mit positiver Schnittkrümmung ist eine starke topologische Bedingung.

Topologische Motivation

Polyedrische Mannigfaltigkeiten mit $K \leq 0$ sind für die Untersuchung von hyperbolischen Mannigfaltigkeiten wichtig. (Effektive Konstruktionsmethoden, Mannigfaltigkeiten mit minimalem Volumen, etc.) **(Thurston, S. Matveev, Freedman)**

Existenz von Riemannschen Metriken mit positiver Schnittkrümmung ist eine starke topologische Bedingung.

Ist die Existenz von polyedrischen Metriken mit $K \geq 0$ auch eine starke topologische Bedingung?

Topologische Motivation

Polyedrische Mannigfaltigkeiten mit $K \leq 0$ sind für die Untersuchung von hyperbolischen Mannigfaltigkeiten wichtig. (Effektive Konstruktionsmethoden, Mannigfaltigkeiten mit minimalem Volumen, etc.) **(Thurston, S. Matveev, Freedman)**

Existenz von Riemannschen Metriken mit positiver Schnittkrümmung ist eine starke topologische Bedingung.
Ist die Existenz von polyedrischen Metriken mit $K \geq 0$ auch eine starke topologische Bedingung? **(Alexandrov, Cheeger)**

Topologische Motivation

Polyedrische Mannigfaltigkeiten mit $K \leq 0$ sind für die Untersuchung von hyperbolischen Mannigfaltigkeiten wichtig. (Effektive Konstruktionsmethoden, Mannigfaltigkeiten mit minimalem Volumen, etc.) **(Thurston, S. Matveev, Freedman)**

Existenz von Riemannschen Metriken mit positiver Schnittkrümmung ist eine starke topologische Bedingung.
Ist die Existenz von polyedrischen Metriken mit $K \geq 0$ auch eine starke topologische Bedingung? **(Alexandrov, Cheeger)**

Topologische Motivation

Polyedrische Mannigfaltigkeiten mit $K \leq 0$ sind für die Untersuchung von hyperbolischen Mannigfaltigkeiten wichtig. (Effektive Konstruktionsmethoden, Mannigfaltigkeiten mit minimalem Volumen, etc.) **(Thurston, S. Matveev, Freedman)**

Untersuchung von Orbifolds

Existenz von Riemannschen Metriken mit positiver Schnittkrümmung ist eine starke topologische Bedingung.

Ist die Existenz von polyedrischen Metriken mit $K \geq 0$ auch eine starke topologische Bedingung? **(Alexandrov, Cheeger)**

Topologische Motivation

Polyedrische Mannigfaltigkeiten mit $K \leq 0$ sind für die Untersuchung von hyperbolischen Mannigfaltigkeiten wichtig. (Effektive Konstruktionsmethoden, Mannigfaltigkeiten mit minimalem Volumen, etc.) **(Thurston, S. Matveev, Freedman)**

Existenz von Riemannschen Metriken mit positiver Schnittkrümmung ist eine starke topologische Bedingung.
Ist die Existenz von polyedrischen Metriken mit $K \geq 0$ auch eine starke topologische Bedingung? **(Alexandrov, Cheeger)**

Untersuchung von Orbifolds **(Boileau, Leeb, Porti, Weiß)**

Topologische Motivation

Polyedrische Mannigfaltigkeiten mit $K \leq 0$ sind für die Untersuchung von hyperbolischen Mannigfaltigkeiten wichtig. (Effektive Konstruktionsmethoden, Mannigfaltigkeiten mit minimalem Volumen, etc.) **(Thurston, S. Matveev, Freedman)**

Existenz von Riemannschen Metriken mit positiver Schnittkrümmung ist eine starke topologische Bedingung.
Ist die Existenz von polyedrischen Metriken mit $K \geq 0$ auch eine starke topologische Bedingung? **(Alexandrov, Cheeger)**

Untersuchung von Orbifolds **(Boileau, Leeb, Porti, Weiß)**

Folgerung

Topologische Motivation

Polyedrische Mannigfaltigkeiten mit $K \leq 0$ sind für die Untersuchung von hyperbolischen Mannigfaltigkeiten wichtig. (Effektive Konstruktionsmethoden, Mannigfaltigkeiten mit minimalem Volumen, etc.) **(Thurston, S. Matveev, Freedman)**

Existenz von Riemannschen Metriken mit positiver Schnittkrümmung ist eine starke topologische Bedingung.
Ist die Existenz von polyedrischen Metriken mit $K \geq 0$ auch eine starke topologische Bedingung? **(Alexandrov, Cheeger)**

Untersuchung von Orbifolds **(Boileau, Leeb, Porti, Weiß)**

Folgerung *Sei* (M, d) *eine geschlossene polyedrische* 3*-Mannigfaltigkeit mit* $K \geq 0$.

Topologische Motivation

Polyedrische Mannigfaltigkeiten mit $K \leq 0$ sind für die Untersuchung von hyperbolischen Mannigfaltigkeiten wichtig. (Effektive Konstruktionsmethoden, Mannigfaltigkeiten mit minimalem Volumen, etc.) **(Thurston, S. Matveev, Freedman)**

Existenz von Riemannschen Metriken mit positiver Schnittkrümmung ist eine starke topologische Bedingung.
Ist die Existenz von polyedrischen Metriken mit $K \geq 0$ auch eine starke topologische Bedingung? **(Alexandrov, Cheeger)**

Untersuchung von Orbifolds **(Boileau, Leeb, Porti, Weiß)**

Folgerung *Sei (M, d) eine geschlossene polyedrische 3-Mannigfaltigkeit mit $K \geq 0$.*
Dann gilt: die Mannigfaltigkeit ist homöomorph zum Quotientenraum von S^3, $S^2 \times \mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^3$ bzgl. einer freien Wirkung einer diskreten Untergruppe der Isometriegruppe der Standard-Metrik.

Topologische Motivation

Polyedrische Mannigfaltigkeiten mit $K \leq 0$ sind für die Untersuchung von hyperbolischen Mannigfaltigkeiten wichtig. (Effektive Konstruktionsmethoden, Mannigfaltigkeiten mit minimalem Volumen, etc.) **(Thurston, S. Matveev, Freedman)**

Existenz von Riemannschen Metriken mit positiver Schnittkrümmung ist eine starke topologische Bedingung.
Ist die Existenz von polyedrischen Metriken mit $K \geq 0$ auch eine starke topologische Bedingung? **(Alexandrov, Cheeger)**

Untersuchung von Orbifolds **(Boileau, Leeb, Porti, Weiß)**

Folgerung *Sei (M, d) eine geschlossene polyedrische 3-Mannigfaltigkeit mit $K \geq 0$.*
Dann gilt: die Mannigfaltigkeit ist homöomorph zum Quotientenraum von S^3, $S^2 \times \mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^3$ bzgl. einer freien Wirkung einer diskreten Untergruppe der Isometriegruppe der Standard-Metrik.

Topologische Motivation

Polyedrische Mannigfaltigkeiten mit $K \leq 0$ sind für die Untersuchung von hyperbolischen Mannigfaltigkeiten wichtig. (Effektive Konstruktionsmethoden, Mannigfaltigkeiten mit minimalem Volumen, etc.) **(Thurston, S. Matveev, Freedman)**

Existenz von Riemannschen Metriken mit positiver Schnittkrümmung ist eine starke topologische Bedingung.
Ist die Existenz von polyedrischen Metriken mit $K \geq 0$ auch eine starke topologische Bedingung? **(Alexandrov, Cheeger)**

Untersuchung von Orbifolds **(Boileau, Leeb, Porti, Weiß)**

Folgerung *Sei (M, d) eine geschlossene polyedrische 3-Mannigfaltigkeit mit $K \geq 0$.*
Dann gilt: die Mannigfaltigkeit ist homöomorph zum Quotientenraum von S^3, $S^2 \times \mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^3$ bzgl. einer freien Wirkung einer diskreten Untergruppe der Isometriegruppe der Standard-Metrik. Ferner gilt: Die Existenz einer wesentlichen Ecke impliziert, dass S^3 die Überlagerung von M ist.

Topologische Motivation

Polyedrische Mannigfaltigkeiten mit $K \leq 0$ sind für die Untersuchung von hyperbolischen Mannigfaltigkeiten wichtig. (Effektive Konstruktionsmethoden, Mannigfaltigkeiten mit minimalem Volumen, etc.) **(Thurston, S. Matveev, Freedman)**

Existenz von Riemannschen Metriken mit positiver Schnittkrümmung ist eine starke topologische Bedingung.
Ist die Existenz von polyedrischen Metriken mit $K \geq 0$ auch eine starke topologische Bedingung? **(Alexandrov, Cheeger)**

Untersuchung von Orbifolds **(Boileau, Leeb, Porti, Weiß)**

Folgerung *Sei (M, d) eine geschlossene polyedrische 3-Mannigfaltigkeit mit $K \geq 0$.*
Dann gilt: die Mannigfaltigkeit ist homöomorph zum Quotientenraum von S^3, $S^2 \times \mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^3$ bzgl. einer freien Wirkung einer diskreten Untergruppe der Isometriegruppe der Standard-Metrik. Ferner gilt: Die Existenz einer wesentlichen Ecke impliziert, dass S^3 die Überlagerung von M ist.
Beweis:

Topologische Motivation

Polyedrische Mannigfaltigkeiten mit $K \leq 0$ sind für die Untersuchung von hyperbolischen Mannigfaltigkeiten wichtig. (Effektive Konstruktionsmethoden, Mannigfaltigkeiten mit minimalem Volumen, etc.) **(Thurston, S. Matveev, Freedman)**

Existenz von Riemannschen Metriken mit positiver Schnittkrümmung ist eine starke topologische Bedingung.
Ist die Existenz von polyedrischen Metriken mit $K \geq 0$ auch eine starke topologische Bedingung? **(Alexandrov, Cheeger)**

Untersuchung von Orbifolds **(Boileau, Leeb, Porti, Weiß)**

Folgerung *Sei* (M, d) *eine geschlossene polyedrische* 3*-Mannigfaltigkeit mit* $K \geq 0$.
Dann gilt: die Mannigfaltigkeit ist homöomorph zum Quotientenraum von S^3, $S^2 \times \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{R}^3$ *bzgl. einer freien Wirkung einer diskreten Untergruppe der Isometriegruppe der Standard-Metrik. Ferner gilt: Die Existenz einer wesentlichen Ecke impliziert, dass* S^3 *die Überlagerung von* M *ist.*
Beweis: Hauptsatz $\Longrightarrow$ Existenz einer Riemannschen Metrik mit Schnittkrümmung > 0 $\overset{\text{Hamilton'scher Ricci-Fluss}}{\Longrightarrow}$ die Mannigfaltigkeit M ist wie in der Folgerung.

Analytische Motivation: geometrische Flüsse

Analytische Motivation: geometrische Flüsse

Wie kann man einen geometrischen Fluss (z.B. Ricci-Fluss) auf einer stückweise-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, d) definieren?

Analytische Motivation: geometrische Flüsse

Wie kann man einen geometrischen Fluss (z.B. Ricci-Fluss) auf einer stückweise-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, d) definieren?
Vorschlag (Gromov 1986):

Analytische Motivation: geometrische Flüsse

Wie kann man einen geometrischen Fluss (z.B. Ricci-Fluss) auf einer stückweise-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, d) definieren?
Vorschlag (Gromov 1986):

- Man betrachte eine Folge g_n von Riemannschen Metriken, die g approximieren: $d_{g_n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} d$, und

Analytische Motivation: geometrische Flüsse

Wie kann man einen geometrischen Fluss (z.B. Ricci-Fluss) auf einer stückweise-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, d) definieren?
Vorschlag (Gromov 1986):

- Man betrachte eine Folge g_n von Riemannschen Metriken, die g approximieren: $\quad d_{g_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} d$, und
- den Ricci-Fluss g_n^t der Metriken g_n.

Analytische Motivation: geometrische Flüsse

Wie kann man einen geometrischen Fluss (z.B. Ricci-Fluss) auf einer stückweise-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, d) definieren?
Vorschlag (Gromov 1986):

- Man betrachte eine Folge g_n von Riemannschen Metriken, die g approximieren: $\quad d_{g_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} d$, und
- den Ricci-Fluss g_n^t der Metriken g_n.
- Hoffnung:

Analytische Motivation: geometrische Flüsse

Wie kann man einen geometrischen Fluss (z.B. Ricci-Fluss) auf einer stückweise-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, d) definieren?
Vorschlag (Gromov 1986):

- Man betrachte eine Folge g_n von Riemannschen Metriken, die g approximieren: $\quad d_{g_n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} d$, und
- den Ricci-Fluss g_n^t der Metriken g_n.
- Hoffnung:
  - g_n^t konvergiert gegen eine Metrik g^t, und
  - das Ergebnis hängt nicht von der Wahl der Approximationen g_n ab.

Analytische Motivation: geometrische Flüsse

Wie kann man einen geometrischen Fluss (z.B. Ricci-Fluss) auf einer stückweise-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, d) definieren?
Vorschlag (Gromov 1986):

- Man betrachte eine Folge g_n von Riemannschen Metriken, die g approximieren: $d_{g_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} d$, und
- den Ricci-Fluss g_n^t der Metriken g_n.
- Hoffnung:
  - g_n^t konvergiert gegen eine Metrik g^t, und
  - das Ergebnis hängt nicht von der Wahl der Approximationen g_n ab.

Funktioniert, falls man die untere Schranke der Krümmung von g_n kontrollieren kann (Simon, 2002 – 2006).

Kombinatorische Motivation: Triangulierungen von Mannigfaltigkeiten

Kombinatorische Motivation: Triangulierungen von Mannigfaltigkeiten

Luo Feng, Walkup, Lutz, Sullivan, Kühnel, Banchoff, Panov.

Kombinatorische Motivation: Triangulierungen von Mannigfaltigkeiten

Luo Feng, Walkup, Lutz, Sullivan, Kühnel, Banchoff, Panov.

Mögliche Frage:

Kombinatorische Motivation: Triangulierungen von Mannigfaltigkeiten

Luo Feng, Walkup, Lutz, Sullivan, Kühnel, Banchoff, Panov.

Mögliche Frage: *Was ist die einfachste Triangulierung einer gegebenen Mannigfaltigkeit?*

Möglicher Weg, die Frage zu studieren:

Kombinatorische Motivation: Triangulierungen von Mannigfaltigkeiten

Luo Feng, Walkup, Lutz, Sullivan, Kühnel, Banchoff, Panov.

Mögliche Frage: *Was ist die einfachste Triangulierung einer gegebenen Mannigfaltigkeit?*

Möglicher Weg, die Frage zu studieren: jede triangulierte Mannigfaltigkeit hat eine kanonische polyedrische Metrik:

Kombinatorische Motivation: Triangulierungen von Mannigfaltigkeiten

Luo Feng, Walkup, Lutz, Sullivan, Kühnel, Banchoff, Panov.

Mögliche Frage: *Was ist die einfachste Triangulierung einer gegebenen Mannigfaltigkeit?*

Möglicher Weg, die Frage zu studieren: jede triangulierte Mannigfaltigkeit hat eine kanonische polyedrische Metrik: wir glauben, dass alle Simplexe regulär sind.

Kombinatorische Motivation: Triangulierungen von Mannigfaltigkeiten

Luo Feng, Walkup, Lutz, Sullivan, Kühnel, Banchoff, Panov.

Mögliche Frage: *Was ist die einfachste Triangulierung einer gegebenen Mannigfaltigkeit?*

Möglicher Weg, die Frage zu studieren: jede triangulierte Mannigfaltigkeit hat eine kanonische polyedrische Metrik: wir glauben, dass alle Simplexe regulär sind. Dann sind die Verklebungsabbildungen automatisch isometrisch.

Satz (Lutz/Sullivan $\overset{\text{unabhängig}}{---}$ Shevchishin/M$\sim$).

Satz (Lutz/Sullivan $\overset{\text{unabhängig}}{---}$ Shevchishin/M$\sim$).
Sei M eine triangulierte geschlossene 3-Mannigfaltigkeit.

Satz (Lutz/Sullivan $\overset{\text{unabhängig}}{---}$ Shevchishin/M$\sim$).
Sei M eine triangulierte geschlossene 3-Mannigfaltigkeit. Angenommen, dass für jede Kante der Triangulierung die Anzahl der Simplexe, die diese Kante enthalten, höchstens 5 ist.

Satz (Lutz/Sullivan $\overset{\text{unabhängig}}{---}$ Shevchishin/M$\sim$).
Sei M eine triangulierte geschlossene 3-Mannigfaltigkeit. Angenommen, dass für jede Kante der Triangulierung die Anzahl der Simplexe, die diese Kante enthalten, höchstens 5 ist. Dann ist S^3 die universelle Überlagerung von M.

Satz (Lutz/Sullivan $\overset{\text{unabhängig}}{---}$ Shevchishin/M$\sim$).
Sei M eine triangulierte geschlossene 3-Mannigfaltigkeit. Angenommen, dass für jede Kante der Triangulierung die Anzahl der Simplexe, die diese Kante enthalten, höchstens 5 ist. Dann ist S^3 die universelle Überlagerung von M.

Satz (Lutz/Sullivan $\overset{\text{unabhängig}}{---}$ Shevchishin/M$\sim$).
Sei M eine triangulierte geschlossene 3-Mannigfaltigkeit. Angenommen, dass für jede Kante der Triangulierung die Anzahl der Simplexe, die diese Kante enthalten, höchstens 5 ist. Dann ist S^3 die universelle Überlagerung von M.

Satz (Lutz/Sullivan $\overset{\text{unabhängig}}{---}$ Shevchishin/M$\sim$).
Sei M eine triangulierte geschlossene 3-Mannigfaltigkeit. Angenommen, dass für jede Kante der Triangulierung die Anzahl der Simplexe, die diese Kante enthalten, höchstens 5 ist. Dann ist S^3 die universelle Überlagerung von M.

Satz (Lutz/Sullivan $\overset{\text{unabhängig}}{---}$ Shevchishin/M∼).
Sei M eine triangulierte geschlossene 3-Mannigfaltigkeit. Angenommen, dass für jede Kante der Triangulierung die Anzahl der Simplexe, die diese Kante enthalten, höchstens 5 ist. Dann ist S^3 die universelle Überlagerung von M.

Satz (Lutz/Sullivan $\overset{\text{unabhängig}}{---}$ Shevchishin/M$\sim$).
Sei M eine triangulierte geschlossene 3-Mannigfaltigkeit. Angenommen, dass für jede Kante der Triangulierung die Anzahl der Simplexe, die diese Kante enthalten, höchstens 5 ist. Dann ist S^3 die universelle Überlagerung von M.

Satz (Lutz/Sullivan $\overset{\text{unabhängig}}{---}$ Shevchishin/M$\sim$).
Sei M eine triangulierte geschlossene 3-Mannigfaltigkeit. Angenommen, dass für jede Kante der Triangulierung die Anzahl der Simplexe, die diese Kante enthalten, höchstens 5 ist. Dann ist S^3 die universelle Überlagerung von M.

Satz (Lutz/Sullivan $\overset{\text{unabhängig}}{---}$ Shevchishin/M$\sim$).
Sei M eine triangulierte geschlossene 3-Mannigfaltigkeit. Angenommen, dass für jede Kante der Triangulierung die Anzahl der Simplexe, die diese Kante enthalten, höchstens 5 ist. Dann ist S^3 die universelle Überlagerung von M.

Beweis:

Satz (Lutz/Sullivan $\overset{\text{unabhängig}}{---}$ Shevchishin/M$\sim$).
Sei M eine triangulierte geschlossene 3-Mannigfaltigkeit. Angenommen, dass für jede Kante der Triangulierung die Anzahl der Simplexe, die diese Kante enthalten, höchstens 5 ist. Dann ist S^3 die universelle Überlagerung von M.

Beweis: Der dihedrale Winkel des regulären Tetraeders ist

$$\arccos(1/3) \approx 70.53\frac{2\pi}{360}.$$

Satz (Lutz/Sullivan $\overset{\text{unabhängig}}{---}$ Shevchishin/M$\sim$).
Sei M eine triangulierte geschlossene 3-Mannigfaltigkeit. Angenommen, dass für jede Kante der Triangulierung die Anzahl der Simplexe, die diese Kante enthalten, höchstens 5 ist. Dann ist S^3 die universelle Überlagerung von M.

Beweis: Der dihedrale Winkel des regulären Tetraeders ist

$$\arccos(1/3) \approx 70.53 \frac{2\pi}{360}.$$

Weil jede Kante in höchstens 5 Simplexen liegt,

Satz (Lutz/Sullivan $\overset{\text{unabhängig}}{---}$ Shevchishin/M$\sim$).
Sei M eine triangulierte geschlossene 3-Mannigfaltigkeit. Angenommen, dass für jede Kante der Triangulierung die Anzahl der Simplexe, die diese Kante enthalten, höchstens 5 ist. Dann ist S^3 die universelle Überlagerung von M.

Beweis: Der dihedrale Winkel des regulären Tetraeders ist

$$\arccos(1/3) \approx 70.53 \frac{2\pi}{360}.$$

Weil jede Kante in höchstens 5 Simplexen liegt, ist die Summe der Winkel um jede Kante höchstens

$$5 \times \arccos(1/3) \approx 352.66 \frac{2\pi}{360} < 2\pi.$$

□

Schema des Beweises

Schema des Beweises

- Wir zeigen, dass man die Mannigfaltigkeit in der Klasse von polyedrischen Mannigfaltigkeiten mit $K \geq 0$ ein bißchen stören kann,

Schema des Beweises

- Wir zeigen, dass man die Mannigfaltigkeit in der Klasse von polyedrischen Mannigfaltigkeiten mit $K \geq 0$ ein bißchen stören kann,

Schema des Beweises

- Wir zeigen, dass man die Mannigfaltigkeit in der Klasse von polyedrischen Mannigfaltigkeiten mit $K \geq 0$ ein bißchen stören kann, sodass alle Polyeder Tetraeder sind und alle Kanten wesentlich sind.

Schema des Beweises

- Wir zeigen, dass man die Mannigfaltigkeit in der Klasse von polyedrischen Mannigfaltigkeiten mit $K \geq 0$ ein bißchen stören kann, sodass alle Polyeder Tetraeder sind und alle Kanten wesentlich sind.

  Methoden: Alexandrov Theorem + Kombinatorik

Schema des Beweises

- Wir zeigen, dass man die Mannigfaltigkeit in der Klasse von polyedrischen Mannigfaltigkeiten mit $K \geq 0$ ein bißchen stören kann, sodass alle Polyeder Tetraeder sind und alle Kanten wesentlich sind.

  Methoden: Alexandrov Theorem + Kombinatorik

  Funktioniert nicht in Dimensionen > 3 (Cheeger—Kühnel, Banchoff, Panov)

Schema des Beweises

- Wir zeigen, dass man die Mannigfaltigkeit in der Klasse von polyedrischen Mannigfaltigkeiten mit $K \geq 0$ ein bißchen stören kann, sodass alle Polyeder Tetraeder sind und alle Kanten wesentlich sind.

  Methoden: Alexandrov Theorem + Kombinatorik

  Funktioniert nicht in Dimensionen > 3 (Cheeger—Kühnel, Banchoff, Panov)

- Wir ersetzen jedes Tetraeder durch ein sphärisches Tetraeder mit kleiner Krümmung

Schema des Beweises

- Wir zeigen, dass man die Mannigfaltigkeit in der Klasse von polyedrischen Mannigfaltigkeiten mit $K \geq 0$ ein bißchen stören kann, sodass alle Polyeder Tetraeder sind und alle Kanten wesentlich sind.

  Methoden: Alexandrov Theorem + Kombinatorik

  Funktioniert nicht in Dimensionen > 3 (Cheeger—Kühnel, Banchoff, Panov)

- Wir ersetzen jedes Tetraeder durch ein sphärisches Tetraeder mit kleiner Krümmung und benutzen dann konvexe Analysis, um die Kanten/Ecken zu glätten.

Themawechsel: Topologie von Liouville'schen Blätterungen

Themawechsel: Topologie von Liouville’schen Blätterungen

Def.

Themawechsel: Topologie von Liouville'schen Blätterungen

Def. Integrable Systeme mit Freiheitsgrad 2

Themawechsel: Topologie von Liouville'schen Blätterungen

Def. Integrable Systeme mit Freiheitsgrad 2 ist (M^4, ω, F_1, F_2),

Themawechsel: Topologie von Liouville'schen Blätterungen

Def. Integrable Systeme mit Freiheitsgrad 2 ist (M^4, ω, F_1, F_2), wobei

- M eine geschlossene differenzierbare Mannigfaltigkeit ist,

Themawechsel: Topologie von Liouville'schen Blätterungen

Def. Integrable Systeme mit Freiheitsgrad 2 ist (M^4, ω, F_1, F_2), wobei

- M eine geschlossene differenzierbare Mannigfaltigkeit ist,
- ω eine geschlossene ($d\omega = 0$) nichtausgeartete ($\forall v \neq 0 \ \omega(v, *) \neq 0$) schiefsymmetrische Form auf M ist,

Themawechsel: Topologie von Liouville'schen Blätterungen

Def. Integrable Systeme mit Freiheitsgrad 2 ist (M^4, ω, F_1, F_2), wobei

- M eine geschlossene differenzierbare Mannigfaltigkeit ist,
- ω eine geschlossene ($d\omega = 0$) nichtausgeartete ($\forall v \neq 0\ \omega(v, *) \neq 0$) schiefsymmetrische Form auf M ist,
- $F_1, F_2 : M \to \mathbb{R}$ kommutieren

Themawechsel: Topologie von Liouville'schen Blätterungen

Def. Integrable Systeme mit Freiheitsgrad 2 ist (M^4, ω, F_1, F_2), wobei

- M eine geschlossene differenzierbare Mannigfaltigkeit ist,
- ω eine geschlossene $(d\omega = 0)$ nichtausgeartete $(\forall v \neq 0 \; \omega(v, *) \neq 0)$ schiefsymmetrische Form auf M ist,
- $F_1, F_2 : M \to \mathbb{R}$ kommutieren (=erfüllen $\{F_1, F_2\}_\omega = \sum\limits_{i,j} \frac{\partial F_1}{\partial x_i} \omega^{ij} \frac{\partial F_2}{\partial x_j} = 0$)

Themawechsel: Topologie von Liouville'schen Blätterungen

Def. Integrable Systeme mit Freiheitsgrad 2 ist (M^4, ω, F_1, F_2), wobei

- M eine geschlossene differenzierbare Mannigfaltigkeit ist,
- ω eine geschlossene $(d\omega = 0)$ nichtausgeartete $(\forall v \neq 0 \ \omega(v, *) \neq 0)$ schiefsymmetrische Form auf M ist,
- $F_1, F_2 : M \to \mathbb{R}$ kommutieren (=erfüllen $\{F_1, F_2\}_\omega = \sum_{i,j} \frac{\partial F_1}{\partial x_i} \omega^{ij} \frac{\partial F_2}{\partial x_j} = 0$)
- und dF_1, dF_2 linear unabhängig sind.

Themawechsel: Topologie von Liouville'schen Blätterungen

Def. Integrable Systeme mit Freiheitsgrad 2 ist (M^4, ω, F_1, F_2), wobei

- M eine geschlossene differenzierbare Mannigfaltigkeit ist,
- ω eine geschlossene ($d\omega = 0$) nichtausgeartete ($\forall v \neq 0 \ \omega(v, *) \neq 0$) schiefsymmetrische Form auf M ist,
- $F_1, F_2 : M \to \mathbb{R}$ kommutieren (=erfüllen $\{F_1, F_2\}_\omega = \sum_{i,j} \frac{\partial F_1}{\partial x_i} \omega^{ij} \frac{\partial F_2}{\partial x_j} = 0$)
- und dF_1, dF_2 linear unabhängig sind.

Sei $\mathcal{F} : M \to \mathbb{R}^2$, $\mathcal{F}(x) = (F_1(x), F_2(x))$.

Def. Integrable Systeme mit Freiheitsgrad 2 ist (M^4, ω, F_1, F_2), wobei

- M eine geschlossene differenzierbare Mannigfaltigkeit ist,
- ω eine geschlossene ($d\omega = 0$) nichtausgeartete ($\forall v \neq 0 \ \omega(v, *) \neq 0$) schiefsymmetrische Form auf M ist,
- $F_1, F_2 : M \to \mathbb{R}$ kommutieren (=erfüllen $\{F_1, F_2\}_\omega = \sum_{i,j} \frac{\partial F_1}{\partial x_i} \omega^{ij} \frac{\partial F_2}{\partial x_j} = 0$)
- und dF_1, dF_2 linear unabhängig sind.

Sei $\mathcal{F} : M \to \mathbb{R}^2$, $\mathcal{F}(x) = (F_1(x), F_2(x))$.

Liouville Theorem (Arnold  **1956)**

Themawechsel: Topologie von Liouville'schen Blätterungen

Def. Integrable Systeme mit Freiheitsgrad 2 ist (M^4, ω, F_1, F_2), wobei

- M eine geschlossene differenzierbare Mannigfaltigkeit ist,
- ω eine geschlossene $(d\omega = 0)$ nichtausgeartete $(\forall v \neq 0\ \omega(v, *) \neq 0)$ schiefsymmetrische Form auf M ist,
- $F_1, F_2 : M \to \mathbb{R}$ kommutieren (=erfüllen $\{F_1, F_2\}_\omega = \sum_{i,j} \frac{\partial F_1}{\partial x_i} \omega^{ij} \frac{\partial F_2}{\partial x_j} = 0$)
- und dF_1, dF_2 linear unabhängig sind.

Sei $\mathcal{F} : M \to \mathbb{R}^2$, $\mathcal{F}(x) = (F_1(x), F_2(x))$.

Liouville Theorem (Arnold  **1956)** Für fast alle $p \in \mathbb{R}^2$ ist jede Zusammenhangskomponente von $\mathcal{F}^{-1}(p)$ zum T^2 diffeomorph.

Morse Theory

Morse Theory	Analog für integrable Systeme

Morse Theory	Analog für integrable Systeme
Auf jeder Mannigfaltigkeit gibt es eine Funktion.	

Morse Theory	Analog für integrable Systeme
Auf jeder Mannigfaltigkeit gibt es eine Funktion.	Auf jeder symplektischen Mannigfaltigkeit gibt es ein integrables System.

Morse Theory	**Analog für integrable Systeme**
Auf jeder Mannigfaltigkeit gibt es eine Funktion.	Auf jeder symplektischen Mannigfaltigkeit gibt es ein integrables System.
Man kann sie stören und eine Morse-Funktion f bekommen.	

Morse Theory	Analog für integrable Systeme
Auf jeder Mannigfaltigkeit gibt es eine Funktion.	Auf jeder symplektischen Mannigfaltigkeit gibt es ein integrables System.
Man kann sie stören und eine Morse-Funktion f bekommen.	Nicht immer,

Morse Theory	Analog für integrable Systeme
Auf jeder Mannigfaltigkeit gibt es eine Funktion.	Auf jeder symplektischen Mannigfaltigkeit gibt es ein integrables System.
Man kann sie stören und eine Morse-Funktion f bekommen.	Nicht immer, aber manchmal auch: man bekommt ein integrables System mit nichtausgearteten singulären Punkten.

Morse Theory	Analog für integrable Systeme
Auf jeder Mannigfaltigkeit gibt es eine Funktion.	Auf jeder symplektischen Mannigfaltigkeit gibt es ein integrables System.
Man kann sie stören und eine Morse-Funktion f bekommen.	Nicht immer, aber manchmal auch: man bekommt ein integrables System mit nichtausgearteten singulären Punkten.
Es gibt endlich viele Typen von singulären Punkten.	

Morse Theory	**Analog für integrable Systeme**
Auf jeder Mannigfaltigkeit gibt es eine Funktion.	Auf jeder symplektischen Mannigfaltigkeit gibt es ein integrables System.
Man kann sie stören und eine Morse-Funktion f bekommen.	Nicht immer, aber manchmal auch: man bekommt ein integrables System mit nichtausgearteten singulären Punkten.
Es gibt endlich viele Typen von singulären Punkten.	Es gibt 4 Typen von singulären Punkten (Elliason 1992):

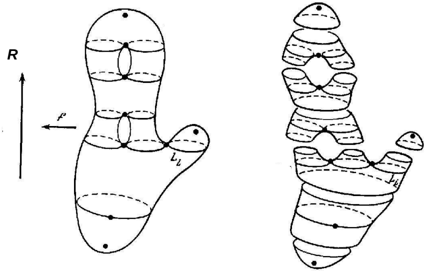
Morse Theory	**Analog für integrable Systeme**
Auf jeder Mannigfaltigkeit gibt es eine Funktion.	Auf jeder symplektischen Mannigfaltigkeit gibt es ein integrables System.
Man kann sie stören und eine Morse-Funktion f bekommen.	Nicht immer, aber manchmal auch: man bekommt ein integrables System mit nichtausgearteten singulären Punkten.
Es gibt endlich viele Typen von singulären Punkten.	Es gibt 4 Typen von singulären Punkten (Elliason 1992): center-center, center-saddle, saddle-saddle, focus-focus.

Morse Theory	Analog für integrable Systeme

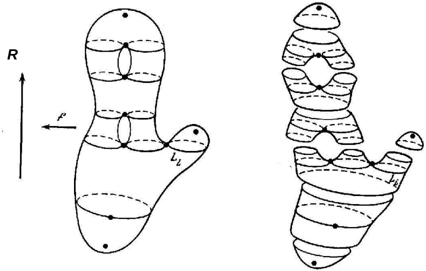
Morse Theory	Analog für integrable Systeme

Morse Theory	Analog für integrable Systeme
Für kleine $U(p) \subset \mathbb{R}$ gibt es endlich viele topologische Typen von $f^{-1}(U(p))$	

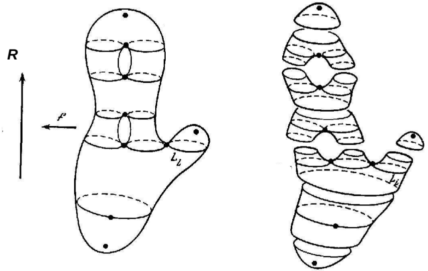
Morse Theory	Analog für integrable Systeme
Für kleine $U(p) \subset \mathbb{R}$ gibt es endlich viele topologische Typen von $f^{-1}(U(p))$	



Morse Theory	Analog für integrable Systeme
Für kleine $U(p) \subset \mathbb{R}$ gibt es endlich viele topologische Typen von $f^{-1}(U(p))$	**Theorem (Bolsinov, Lerman, Umanskii, Oshemkov, Cushman, Vu, . . . , M∼):**

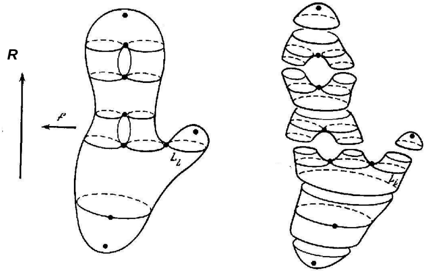


Morse Theory	**Analog für integrable Systeme**
Für kleine $U(p) \subset \mathbb{R}$ gibt es endlich viele topologische Typen von $f^{-1}(U(p))$	**Theorem (Bolsinov, Lerman, Umanskii, Oshemkov, Cushman, Vu, . . . , M$\sim$):** Es gibt endlich viele topologische Typen von $\mathcal{F}^{-1}(U)$, wobei $U \in \mathbb{R}$ klein ist und $\mathcal{F}^{-1}(U)$ nur nichtausgeartete Punkte enthält:



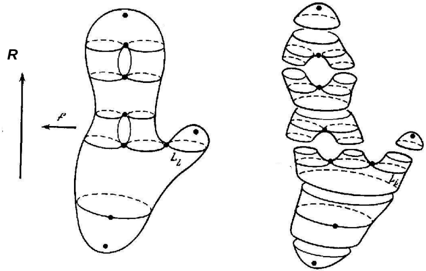
Morse Theory	Analog für integrable Systeme

Für kleine $U(p) \subset \mathbb{R}$ gibt es endlich viele topologische Typen von $f^{-1}(U(p))$



Theorem (Bolsinov, Lerman, Umanskii, Oshemkov, Cushman, Vu, . . . , M∼): Es gibt endlich viele topologische Typen von $\mathcal{F}^{-1}(U)$, wobei $U \in \mathbb{R}$ klein ist und $\mathcal{F}^{-1}(U)$ nur nichtausgeartete Punkte enthält:

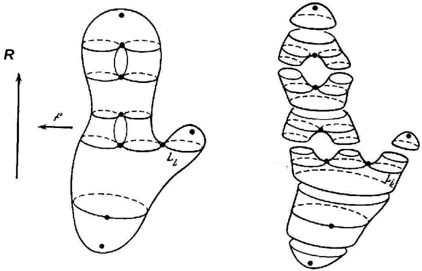
- 1 Typ mit center-center-Punkt (Folklore)

Morse Theory	Analog für integrable Systeme
Für kleine $U(p) \subset \mathbb{R}$ gibt es endlich viele topologische Typen von $f^{-1}(U(p))$  	**Theorem (Bolsinov, Lerman, Umanskii, Oshemkov, Cushman, Vu, . . . , M$\sim$):** Es gibt endlich viele topologische Typen von $\mathcal{F}^{-1}(U)$, wobei $U \in \mathbb{R}$ klein ist und $\mathcal{F}^{-1}(U)$ nur nichtausgeartete Punkte enthält: ▶ 1 Typ mit center-center-Punkt (Folklore) ▶ 1 Typ mit center-saddle-Punkt (Lerman, Umanskii 1991)

Morse Theory	Analog für integrable Systeme

Morse Theory

Für kleine $U(p) \subset \mathbb{R}$ gibt es endlich viele topologische Typen von $f^{-1}(U(p))$



Analog für integrable Systeme

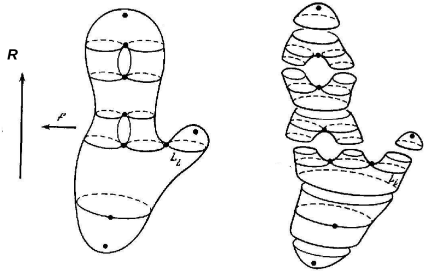
Theorem (Bolsinov, Lerman, Umanskii, Oshemkov, Cushman, Vu, . . . , M$\sim$): Es gibt endlich viele topologische Typen von $\mathcal{F}^{-1}(U)$, wobei $U \in \mathbb{R}$ klein ist und $\mathcal{F}^{-1}(U)$ nur nichtausgeartete Punkte enthält:

- 1 Typ mit center-center-Punkt (Folklore)
- 1 Typ mit center-saddle-Punkt (Lerman, Umanskii 1991)
- 1 Typ mit n focus-focus-Punkten (M$\sim$ 1995 — Vu, Cushman 1999)

Morse Theory	Analog für integrable Systeme

Morse Theory

Für kleine $U(p) \subset \mathbb{R}$ gibt es endlich viele topologische Typen von $f^{-1}(U(p))$

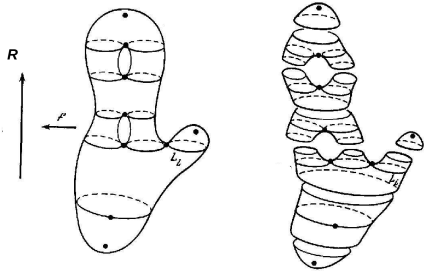


Analog für integrable Systeme

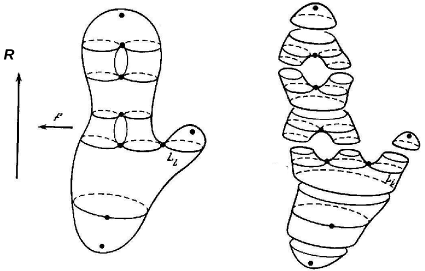
Theorem (Bolsinov, Lerman, Umanskii, Oshemkov, Cushman, Vu, . . . , M$\sim$): Es gibt endlich viele topologische Typen von $\mathcal{F}^{-1}(U)$, wobei $U \in \mathbb{R}$ klein ist und $\mathcal{F}^{-1}(U)$ nur nichtausgeartete Punkte enthält:

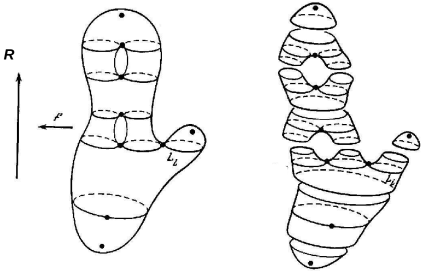
- 1 Typ mit center-center-Punkt (Folklore)
- 1 Typ mit center-saddle-Punkt (Lerman, Umanskii 1991)
- 1 Typ mit n focus-focus-Punkten (M$\sim$ 1995 — Vu, Cushman 1999)
- 4 Typen mit saddle-saddle-Punkt (Lerman, Umanskii 1992)

Morse Theory	Analog für integrable Systeme
Für kleine $U(p) \subset \mathbb{R}$ gibt es endlich viele topologische Typen von $f^{-1}(U(p))$	**Theorem (Bolsinov, Lerman, Umanskii, Oshemkov, Cushman, Vu, . . . , M$\sim$):** Es gibt endlich viele topologische Typen von $\mathcal{F}^{-1}(U)$, wobei $U \in \mathbb{R}$ klein ist und $\mathcal{F}^{-1}(U)$ nur nichtausgeartete Punkte enthält:

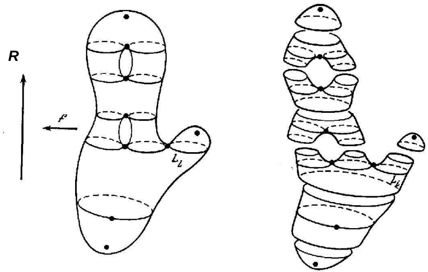


- 1 Typ mit center-center-Punkt (Folklore)
- 1 Typ mit center-saddle-Punkt (Lerman, Umanskii 1991)
- 1 Typ mit n focus-focus-Punkten (M$\sim$ 1995 — Vu, Cushman 1999)
- 4 Typen mit saddle-saddle-Punkt (Lerman, Umanskii 1992)
- 39 Typen mit 2 saddle-saddle-Punkten (Bolsinov, M$\sim$ 1993)

Morse Theory	Analog für integrable Systeme
Für kleine $U(p) \subset \mathbb{R}$ gibt es endlich viele topologische Typen von $f^{-1}(U(p))$  	**Theorem (Bolsinov, Lerman, Umanskii, Oshemkov, Cushman, Vu, . . . , M$\sim$):** Es gibt endlich viele topologische Typen von $\mathcal{F}^{-1}(U)$, wobei $U \in \mathbb{R}$ klein ist und $\mathcal{F}^{-1}(U)$ nur nichtausgeartete Punkte enthält: ▶ 1 Typ mit center-center-Punkt (Folklore) ▶ 1 Typ mit center-saddle-Punkt (Lerman, Umanskii 1991) ▶ 1 Typ mit n focus-focus-Punkten (M$\sim$ 1995 — Vu, Cushman 1999) ▶ 4 Typen mit saddle-saddle-Punkt (Lerman, Umanskii 1992) ▶ 39 Typen mit 2 saddle-saddle-Punkten (Bolsinov, M$\sim$ 1993) ▶ 256 Typen mit 3 saddle-saddle-Punkten (Maximova, M$\sim$ 1997)

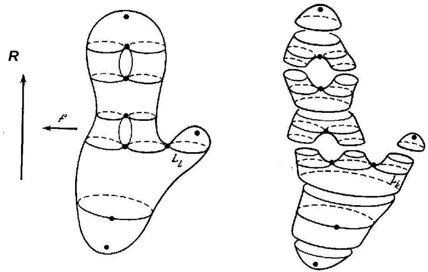
Morse Theory	Analog für integrable Systeme
Für kleine $U(p) \subset \mathbb{R}$ gibt es endlich viele topologische Typen von $f^{-1}(U(p))$ 	**Theorem (Bolsinov, Lerman, Umanskii, Oshemkov, Cushman, Vu, . . . , M∼):** Es gibt endlich viele topologische Typen von $\mathcal{F}^{-1}(U)$, wobei $U \in \mathbb{R}$ klein ist und $\mathcal{F}^{-1}(U)$ nur nichtausgeartete Punkte enthält: ▶ 1 Typ mit center-center-Punkt (Folklore) ▶ 1 Typ mit center-saddle-Punkt (Lerman, Umanskii 1991) ▶ 1 Typ mit n focus-focus-Punkten (M∼ 1995 — Vu, Cushman 1999) ▶ 4 Typen mit saddle-saddle-Punkt (Lerman, Umanskii 1992) ▶ 39 Typen mit 2 saddle-saddle-Punkten (Bolsinov, M∼ 1993) ▶ 256 Typen mit 3 saddle-saddle-Punkten (Maximova, M∼ 1997)

Methoden



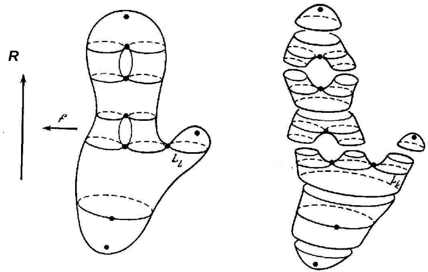
- Sympektische Topologie
  - Man zeigt, dass $\mathcal{F}^{-1}(p)$ Retrakt einer Umgebung $\mathcal{F}^{-1}(U(p))$ ist,

Methoden



- Sympektische Topologie
  - Man zeigt, dass $\mathcal{F}^{-1}(p)$ Retrakt einer Umgebung $\mathcal{F}^{-1}(U(p))$ ist,
  - Man zeigt, dass $\mathcal{F}^{-1}(p)$ ein CW-Kompex der Dimension 2 mit bestimmten Eigenschaften ist.

Methoden



- Sympektische Topologie
  - Man zeigt, dass $\mathcal{F}^{-1}(p)$ Retrakt einer Umgebung $\mathcal{F}^{-1}(U(p))$ ist,
  - Man zeigt, dass $\mathcal{F}^{-1}(p)$ ein CW-Kompex der Dimension 2 mit bestimmten Eigenschaften ist.
- Der Computer zählt alle CW-Kompexe mit diesen Eigenschaften auf.

Plan meines Vortrags:

Plan meines Vortrags:

- Mannigfaltigkeiten mit geodätisch äquivalenten Metriken

Plan meines Vortrags:

- Mannigfaltigkeiten mit geodätisch äquivalenten Metriken
  Hauptsatz: Haben einfache Topologie.

Plan meines Vortrags:

- Mannigfaltigkeiten mit geodätisch äquivalenten Metriken
  Hauptsatz: Haben einfache Topologie.
- Polyedrische Mannigfaltigkeiten mit $K \geq 0$

Plan meines Vortrags:

- Mannigfaltigkeiten mit geodätisch äquivalenten Metriken

  Hauptsatz: Haben einfache Topologie.

- Polyedrische Mannigfaltigkeiten mit $K \geq 0$

  Hauptsatz: Können durch Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit Schnittkrümmung ≥ 0 approximiert werden

Plan meines Vortrags:

- Mannigfaltigkeiten mit geodätisch äquivalenten Metriken

  Hauptsatz: Haben einfache Topologie.

- Polyedrische Mannigfaltigkeiten mit $K \geq 0$

  Hauptsatz: Können durch Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit Schnittkrümmung ≥ 0 approximiert werden

- Integrable Systeme

Plan meines Vortrags:

- Mannigfaltigkeiten mit geodätisch äquivalenten Metriken

  Hauptsatz: Haben einfache Topologie.

- Polyedrische Mannigfaltigkeiten mit $K \geq 0$

  Hauptsatz: Können durch Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit Schnittkrümmung ≥ 0 approximiert werden

- Integrable Systeme

  Haupsatz: Haben lokal endlich viele topologische Typen von ganzen Umgebungen von nichtausgearteten singulären Punkten.

Plan meines Vortrags:

- Mannigfaltigkeiten mit geodätisch äquivalenten Metriken

  Hauptsatz: Haben einfache Topologie.

- Polyedrische Mannigfaltigkeiten mit $K \geq 0$

  Hauptsatz: Können durch Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit Schnittkrümmung ≥ 0 approximiert werden

- Integrable Systeme

  Haupsatz: Haben lokal endlich viele topologische Typen von ganzen Umgebungen von nichtausgearteten singulären Punkten.

- Vielen Dank