Vladimir S. Matveev (Jena)

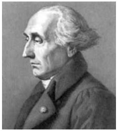
Geodätisch äquivalente Metriken und integrable Systeme.

Plan

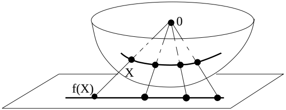
- Die Lösung der topologischen Version des Problems von Beltrami
  - Beweis in Dimension 2
  - Beweismethoden für beliebige Dimension
- Die Lösung der zwei Probleme von Lie und des Problems von Schouten
- Die Lösung vom Problem von Weyl und Ehlers
- www.minet.uni-jena.de/$\sim$matveev/

Definition und klassische Beispiele

Def. Zwei Metriken g und $\bar{g}$ auf einer Mannigfaltigkeit M sind geodätisch äquivalent, falls sie gleiche (nichtparametrisierte) Geodäten haben. (Bezeichnung: $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$)

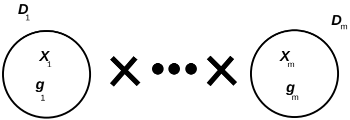


Lagrange 1789: Radiale Projektion
$f : S^2_{\frac{1}{2}} \to \mathbb{R}^2$ bildet Geodäten
der Halbsphäre (Großkreise)
auf Geodäten der Ebene (Geraden) ab.



Beispiel von Levi-Civita

- $D_1, \ldots, D_m$ seien die Bälle
- g_i sei eine Riemannsche Metrik auf D_i
- $X_i : D_i \to \mathbb{R}_{>0}$ sodass
  - $\forall x_i \in D_i,\ x_j \in D_j \quad X_i(x_i) \neq X_j(x_j)$ $(i \neq j)$
  - $dim(D_i) \geq 2 \implies X_i = \mathrm{konst}_i$



$$g := \sum_i \underbrace{\prod_{j>i} |(X_i(x_i) - X_j(x_j))|}_{P_i} g_i$$

$$\bar{g} := \sum_i \underbrace{\frac{1}{X_i} \prod_\alpha \frac{1}{X_\alpha}}_{\rho_i} \underbrace{\prod_{j>i} |(X_i - x_j)|}_{P_i} g_i$$

Levi-Civita  1896: Es gilt:

- $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$
- zwei geodätisch äquivalente Metriken kann man in der Umgebung fast jedes Punktes in diese Form bringen.

Wichtige Beobachtung:

Die geodätisch äquivalenten Metriken g und $\bar g$ bestimmen die Daten $(D_i,\, g_i,\, X_i)$. Tatsächlich, $(1,1)-$Tensor $L := (\bar g)^{-1} g \cdot \left(\frac{det(\bar g)}{det(g)}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

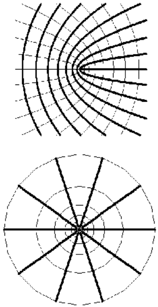
$$= \begin{pmatrix} \boxed{\frac{1}{\rho_1 P_1}(g_1)^{-1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\frac{1}{\rho_m P_m}(g_m)^{-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{P_1 g_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{P_m g_m} \end{pmatrix} \cdot \prod_\alpha \frac{1}{X_\alpha}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} X_1 & & \\ & \ddots & \\ & & X_1 \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} X_m & & \\ & \ddots & \\ & & X_m \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

- Die Funktionen X_i sind Eigenwerte von L
- Distributionen der Eigenräume von L sind integrabel und generieren Blätterungen (fast überall)
- die Blätter sind lokal D_i

Fazit:

- $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ geben uns paarweise transversale (singuläre) Levi-Civita-Blätterungen $B_1, \ldots, B_m$ auf M s.d. $dim(B_1) + \cdots + dim(B_m) = dim(M)$
- Diese Blätterungen enthalten viel Informationen über geodätisch äquivalente Metriken, z.B:
- Falls $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ auf M gegeben sind, können wir neue Beispiele von geodätisch äquivalenten Metriken konstruieren: wir erhalten die Blätterungen und ändern X_i und g_i.



Mögliche Singularitäten der Blätterungen in Dim 2

Das Problem von Beltrami

Beltrami 1865: La seconda . . . generalizzazione ... del nostro problema, vale a dire: riportare i punti di una superficie sopra un' altra superficie in modo che alle linee geodetiche della prima corrispondano linee geodetiche della seconda.

Übersetzung: Man soll alle Paare von geodätisch äquivalenten Metriken beschreiben.

Antwort auf die topologische Version

Satz (M$\sim$ 2010) *Sei M geschlossen, zusammenhängend. Seien $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ und nichtproportional: $g \neq konst \cdot \bar{g}$. Dann gilt: entweder*

- *M ist diffeomorph zu einer reduziblen Raumform:*

$$M \overset{diffeo}{\approx} S^n/_G, \text{ sodass } G \subset O(n+1) \begin{cases} \textit{ist diskret,} \\ \textit{operiert frei auf } S^n \\ = \underbrace{G_1}_{\neq G} + \underbrace{G_2}_{\neq G} \end{cases}$$

oder

- *$\exists \hat{g}$ auf M, sodass die Holonomiegruppe reduzibel ist.*

Folgerung 1 (Topalov, M$\sim$ 2001; wird heute bewiesen):
Jede geschlossene orientierte Fläche mit nichtproportionalen $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ ist (homöomorph zu) S^2 oder T^2.

Folgerung 2 (M$\sim$ 2003): Jede geschlossene 3-Mannigfaltigkeit mit nichtproportionalen $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ ist eine Seifertmannigfaltigkeit.

Integrable Systemen in Theorie von geod. äquiv. Metriken

Gegeben sei $g, \ \bar{g}$ auf M^n $\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $L := \bar{g}^{-1} g \cdot \left(\frac{\det \bar{g}}{\det g}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

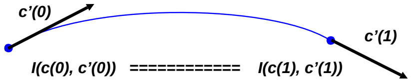
$\xrightarrow{\forall t \in \mathbb{R} \text{ man konstruiere}}$ $S_t := (L - t \cdot \mathbf{Id})^{-1} \cdot det(L - t \cdot \mathbf{Id})$

$\xrightarrow{\text{man konstruiere}}$ $I_t : TM^n \to \mathbb{R}, I_t(\xi) := g(S_t(\xi), \xi)$.

Satz (Topalov, M$\sim$ 1998):

Ist $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$, so sind $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ die Funktionen I_{t_i} kommutierende Integrale für den geodätischen Fluss von g (d.h. für die Hamiltonsche Funktion $H(\xi) := g(\xi, \xi)$)

Eine Funktion $I : TM \to \mathbb{R}$ ist ein Integral für g, wenn für jede Geodäte $c : \mathbb{R} \to M$ gilt: die Funktion $I(c(t), c'(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist konstant.



Beweis der Folgerung 1: Trick

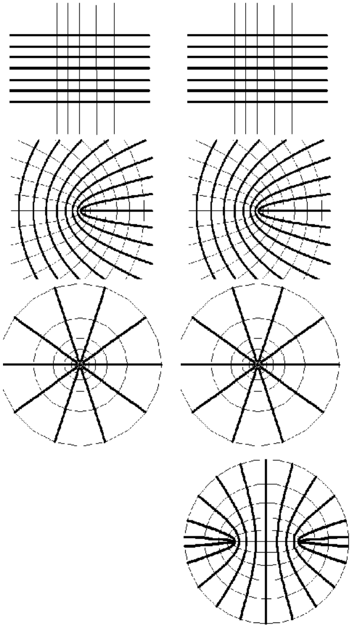
Folgerung 1 – Wiederholung. *(Ist $g \overset{\text{g.ä.}}{\sim} \bar{g}$ auf einer geschlossenen Fläche M^2 vom Geschlecht ≥ 2, so ist $g = konst \cdot \bar{g}$)*

In Dimension 2 ist das Integral I_0

$$I_0(\xi) := \left(\frac{\det(g)}{\det(\bar{g})}\right)^{\frac{2}{3}} \bar{g}(\xi, \xi).$$

Wegen der Eulercharakteristik gibt es ein x_0, sodass (nach Skalierung) $g_{|x_0} = \bar{g}_{|x_0}$. Wir nehmen $g_{|x_1} \neq \bar{g}_{|x_1}$ für ein x_1 an und erhalten einen Widerspruch.

Beweis für beliebige Dimension



- Man betrachtet die „Levi-Civita“ Blätterungen $B_1, \ldots, B_m$ und zeigt, dass die singulären Punkte in Untermannigfaltigkeiten von Codimension ≥ 2 angeordnet sind

  (Methoden: Trick und Analysis)

- Man beschreibe die Blätterung in der Nähe der singulären Punkte (bis auf blätterungserhaltende Homöomorphismen). Es gibt endlich viele „Bausteine“.

  (Methoden: Trick, Analysis und Topologie)

- Man klebt die „Bausteine“ zusammen.

  (Methoden: Differentialgeometrie)

Die infinitesimale Version: Probleme von Lie

Lie 1882:

Problem I: *Man soll die Form des Bogenelementes einer jeden Fläche bestimmen, deren geodätische Kurven eine infinitesimale Transformation gestatten.*

Problem II: *Man soll die Form des Bogenelementes einer jeden Fläche bestimmen, deren geodätische Kurven mehrere infinitesimale Transformationen gestatten.*

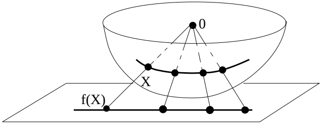
Def. Ein Vektorfeld auf einer (pseudo)riemannschen Mannigfaltigkeit ist projektiv, falls dessen Fluss die (nichtparametrisierten) Geodäten erhält.

Übersetzung: Man soll alle 2-dim Metriken beschreiben, die

- Problem I: ein projektives Vektorfeld
- Problem II: mind. zwei linear unabhängige projektive Vektorfelder

gestatten.

Bsp: Die (flache) Ebene und die (runde) Sphäre haben eine 8-dimensionale Lie-Algebra ($sl(3)$) von projektiven Vektorfeldern



Satz (Bryant, Manno, M$\sim$) 2007: *Hat eine Fläche (M^2, g) von nichtkonstanter Krümmung mind. 2 linear unabhängige projektive Vektorfelder, so gibt es Koordinaten in der Umgebung von fast jedem Punkt, sodass die Metrik g wie unten ist:*

1. Zwei projektive Vektorfelder:

   1.1 $\varepsilon_1 e^{(b+2)\,x}\, dx^2 + \varepsilon_2 e^{b\,x}\, dy^2$, wobei $b \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1\}$ und $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ Konstanten sind,

   1.2 $a\left(\frac{e^{(b+2)\,x} dx^2}{(e^{b\,x}+\varepsilon_2)^2} + \varepsilon_1 \frac{e^{b\,x} dy^2}{e^{b\,x}+\varepsilon_2}\right)$, wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1\}$, und $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ Konstanten sind, und

   1.3 $a\left(\frac{e^{2\,x} dx^2}{x^2} + \varepsilon \frac{dy^2}{x}\right)$, wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, und $\varepsilon \in \{1, -1\}$ Konstanten sind.

2. Drei projektive Vektorfelder:

   2.1 $\varepsilon_1 e^{3x} dx^2 + \varepsilon_2 e^{x} dy^2$, wobei $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ Konstanten sind,

   2.2 $a\left(\frac{e^{3x} dx^2}{(e^{x}+\varepsilon_2)^2} + \varepsilon_1 \frac{e^{x} dy^2}{(e^{x}+\varepsilon_2)}\right)$, wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ Konstanten sind, und

   2.3 $a\left(\frac{dx^2}{(cx+2x^2+\varepsilon_2)^2 x} + \varepsilon_1 \frac{x dy^2}{(cx+2x^2+\varepsilon_2)}\right)$, wobei $a > 0$, $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, $c \in \mathbb{R}$ Konstanten sind.

Beispiel zum 1. Problem von Lie: infinitesimale Homothetie

Def. Ein Vektorfeld heißt eine infinitesimale Homothetie, falls dessen Fluss die Metrik vervielfacht.

Bsp. Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial x} = (1,0)$ ist eine infinitesimale Homothetie zur Metrik $e^{\lambda x}\left(E(y)dx^2 + F(y)dxdy + G(y)dy^2\right)$ auf U^2.

In der Tat, der Fluss von $\frac{\partial}{\partial x}$ ist die Abbildung $\phi : \mathbb{R} \times U^2 \to U^2$, $\phi_t(x,y) = (x+t, y)$ und

$$\phi_t^*\left(e^{\lambda x}\left(E(y)dx^2 + F(y)dxdy + G(y)dy^2\right)\right)$$
$$= e^{\lambda(x+t)}\left(E(y)dx^2 + F(y)dxdy + G(y)dy^2\right)$$
$$= e^{\lambda t}e^{\lambda x}\left(E(y)dx^2 + F(y)dxdy + G(y)dy^2\right).$$

Jede infinitesimale Homothetie ist offensichtlich ein projektives Vektorfeld.

Satz (M$\sim$ 2008): *Eine Fläche $(M^2, \bar{g})$ habe ein projektives Vektorfeld, aber keine infinitesimale Homothetie. Dann gibt es in der Umgebung von fast jedem Punkt Koordinaten (x, y), eine Metrik g, die zu $\bar{g}$ geodätisch äquivalent ist, und ein projektives Vektorfeld v, sodass*

1. $ds_g^2 = (X(x) - Y(y))(X_1(x)dx^2 + Y_1(y)dy^2), v = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$, sodass
   - 1.1 $X(x) = \frac{1}{x}$, $Y(y) = \frac{1}{y}$, $X_1(x) = C_1 \cdot \frac{e^{-3x}}{x}$, $Y_1(y) = \frac{e^{-3y}}{y}$.
   - 1.2 $X(x) = \tan(x)$, $Y(y) = \tan(y)$, $X_1(x) = C_1 \cdot \frac{e^{-3\lambda x}}{\cos(x)}$, $Y_1(y) = \frac{e^{-3\lambda y}}{\cos(y)}$.
   - 1.3 $X(x) = C_1 \cdot e^{\nu x}$, $Y(y) = e^{\nu y}$, $X_1(x) = e^{2x}$, $Y_1(y) = \pm e^{2y}$.
2. $ds_g^2 = (Y(y) + x)dxdy$, $v = v_1(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + v_2(y)\frac{\partial}{\partial y}$, sodass
   - 2.1 $Y = e^{\frac{3}{2y}} \cdot \frac{\sqrt{y}}{y-3} + \int_{y_0}^{y} e^{\frac{3}{2\xi}} \cdot \frac{\sqrt{\xi}}{(\xi-3)^2} d\xi$,
     $v_1 = \frac{y-3}{2}\left(x + \int_{y_0}^{y} e^{\frac{3}{2\xi}} \cdot \frac{\sqrt{\xi}}{(\xi-3)^2} d\xi\right)$, $v_2 = y^2$.
   - 2.2 $Y = e^{-\frac{3}{2}\lambda \arctan(y)} \cdot \frac{\sqrt[4]{y^2+1}}{y-3\lambda} + \int_{y_0}^{y} e^{-\frac{3}{2}\lambda \arctan(\xi)} \cdot \frac{\sqrt[4]{\xi^2+1}}{(\xi-3\lambda)^2} d\xi$,
     $v_1 = \frac{y-3\lambda}{2}\left(x + \int_{y_0}^{y} e^{-\frac{3}{2}\lambda \arctan(\xi)} \cdot \frac{\sqrt[4]{\xi^2+1}}{(\xi-3\lambda)^2} d\xi\right)$, $v_2 = y^2 + 1$.
   - 2.3 $Y(y) = y^{\nu}$, $v_1(x, y) = \nu x$, $v_2 = y$.

Das Problem von Schouten und dessen Motivation

Schouten  1924: *Man soll alle vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten beschreiben, deren kontinuierliche Gruppe von Geodäten-erhaltenden Transformationen grösser ist als die Gruppe der Isometrien*

Motivation: Klein  :**Erlanger Programm 1872**:

Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben; man soll die der Mannigfaltigkeit angehörigen Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften untersuchen, die durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden.

Lösung des Problems von Schouten

Ich habe (2005) die Vermutung von Lichnerowicz  **bewiesen:**

Jede vollständige einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren zusammenhängende Lie-Gruppe von Geodäten-erhaltenden Transformationen grösser ist als die Gruppe der affinen Transformationen, ist isometrisch zu einer runden Sphäre.

Frankreich (Lichnerowicz)	Japan (Yano, Obata, Tanno)	Sowjetunion (Raschewskii)
Couty (1961) hat die Vermutung unter der Annahme bewiesen, dass g Einstein oder Kähler ist.	Yamauchi (1974) hat die Vermutung unter der Annahme bewiesen, dass die Skalarkrümmung konstant ist.	Solodovnikov (1956) hat die Vermutung unter den Annahmen bewiesen, dass ▶ alles reell-analytisch ist, ▶ und $n \geq 3$.

Plan der Lösung der Probleme von Lie und des Problems von Schouten

- Als System von PDE umschreiben
- Das System von PDE analysieren
  - Lokale Analyse für Probleme von Lie
  - Globale Analyse für Problem von Schouten

Frage von Weyl/Ehlers

Weyl $\sim$ **1930:** Können zwei 4-dimensionale Einstein-Metriken (d.h., sodass $\mathrm{Ricc} = \frac{1}{4}\mathrm{Scal} \cdot g$) geodätisch äquivalent sein?

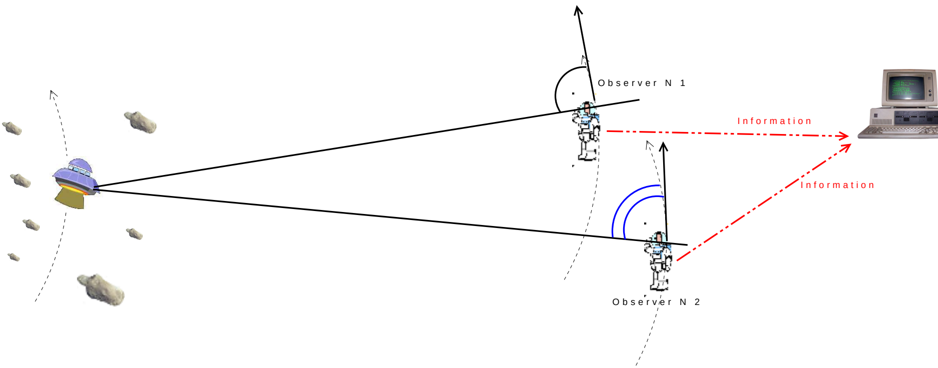
Ehlers 1972: "We reject clocks as basic tools for setting up the space-time geometry and propose ... freely falling particles instead. We wish to show how the full space-time geometry can be synthesized ... . Not only the measurement of length but also that of time then appears as a derived operation."

Ein sehr actives Forschungsgebiet in 1960–90:
Mehrere Arbeiten in diese Richtung: Weyl 1921, Couty 1961, Petrov 1963, Ehlers 1972–1977, Mikes 1982, Barnes 1993, Hall (-Lonie) 1995–2007, Kiosak 2000, Mikes-Kiosak-Hinterleitner 2006 haben diese Frage unter zusätzlichen Voraussetzungen negativ beantwortet.

Motivation von Weyl und Ehlers

- Einsteinmetriken beschreiben Vakuum.
- Mehrere astronomische Beobachtungen liefern uns nur UMPARAMETRISIERTE Geodäten, weil die Eigenzeit des Objektes (also, der Bogenlängenparameter der Weltlinie (= Geodäte)) nichts mit unserer Eigenzeit zu tun hat, bekommen wir die Trajektorien von Objekten als nach unserer Eigenzeit umparameterisierte Geodäten.

One can obtain unparametrized geodesics by observation:



We take 4 freely falling observers that

measure the angular coordinate of the visible objects

and send this information to one place. This place will have
4 functions angle(t) for every visible object
which are in general case 4 coordiantes of the object.

Antwort auf die Frage von Weyl/Ehlers

Satz (Kiosak, M$\sim$ 2009): $4-$**dim Einstein-Metriken sind geodätisch starr:** Sei g eine pseudo-Riemannsche Einstein-Metrik mit nichtkonstanter Krümmung auf M^4. Es gilt: jede Metrik $\bar{g}$, die zu g geodätisch äquivalent ist, ist affin äquivalent zu g , d.h., die Levi-Civita Zusammenhänge von g und $\bar{g}$ sind identisch.

Beweisschritte

- Als PDE-System umschreiben (wurde von Levi-Civita 1896 und von Sinjukov 1979 gemacht)
- Prolongation-Projection-Method (ich erkläre einen naiven Zugang) anwenden und einen Ansatz für die Metrik $\bar{g}$ bekommen; schwierig.
- Den Ansatz in PDE-System einsetzen und analysieren (relativ einfach lokal; schwieriger, wenn man das Problem in grösseren Dimensionen und global betrachtet.)

PDE-Gleichung für geodätische Äquivalenz

Fakt (Levi-Civita 1896): Ist $g \sim \bar g$, so ist (eigentlich, $\iff$)

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^k}\bar g_{ij} - \bar g_{ia}\Gamma^a_{kj} - \bar g_{ja}\Gamma^a_{ki}\right] - \phi_i \bar g_{kj} - \phi_j \bar g_{ki} - 2\phi_k \bar g_{ij} = 0 \qquad (*),$$

Wir denken uns, dass Γ und ϕ bekannt sind; dann ist $(*)$ ein PDE-System aus $\frac{n^2(n+1)}{2}$ LINEAREN Gleichungen erster Ordnung auf $\frac{n(n+1)}{2}$ unbekannte Funktionen $\bar g_{ij}$.

Wir differenzieren $(*)$ zweimal bzgl. allen Variablen und betrachten die Ableitungen als neue Unbekannte:

	Urspr. Gleichungen	nach einmal Differenzieren	Nach zweimal Differenzieren
Anzahl von Unbekanten	$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2}$	$+\frac{n^2(n+1)^2}{4}$	$+\frac{n^2(n+1)^2(n+2)}{12}$
Anzahl von Gleichungen	$\frac{n^2(n+1)}{2}$	$+\frac{n^3(n+1)}{2}$	$+\frac{n^3(n+1)^2}{4}$

Wir sehen, dass (für $n = 4$, eigentlich für $n \geq 3$) die Anzahl von Unbekannten

$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n^2(n+1)^2(n+2)}{12} = \frac{n(n+1)^2(n+2)(n+3)}{12} = 350$ von unserem LINEARsystem von ALGEBRAISCHEN GLEICHUNGEN kleiner ist als die Anzhal von Gleichungen

$\frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n^3(n+1)}{2} + \frac{n^3(n+1)^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2(n+2)}{4} = 600.$

Dann müssen die Koeffiziente des Systems algebraische Bedienungen erfüllen.

Es ist eine nicht-triviale linear-algebraische Aufgabe, die Lösbarkeit von linearen Gleichungsystemen aus 600 Gleichungen auf 350 Unbekannte zu analysieren. Wir haben es gemacht. Eine Bedienung auf $\bar{g}$ lautet

Hilfssatz *Sei g Einsteinsch; $n = dim(M) \geq 3$. Dann gilt: jede Metrik $\bar{g}$ die zu g geodätisch, aber nicht affin äquivalent ist, erfüllt*

$$W^i{}_{akm}\bar{g}^{aj} + W^j{}_{akm}\bar{g}^{ia} = 0 \qquad (**)$$

wobei W der projektive Weyl-Tensor ist. Ferner gilt: W has typ **N** in der Petrov-Klassifikation, d.h. es existiert ein Null-Vektor $v^a \neq \vec{0}$, sodass

$$v^a W^i{}_{ajk} = 0. \qquad (***)$$

Falls $W \equiv 0$, sind die Bedingungen $(**), (***)$ automatisch erfüllt; aber $W \equiv 0$ bedeutet, dass die Metrik konstante Krümmung hat.

In dim 4 mit Lorenz-Signatur, sind $(**)$ und $(***)$ starke algebraische Bedienungen auf die Metrik $\bar{g}$, nämlich
$\bar{g}^{ij} = \rho(x) \cdot g^{ij} + \lambda^i \lambda^j$ für ein λ^i.
Das ist ein Ansatz für $\bar{g}$, wir setzen diese Formel in die Gleichung

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^k}\bar{g}_{ij} - \bar{g}_{ia}\Gamma^a{}_{kj} - \bar{g}_{ja}\Gamma^a{}_{ki}\right] - \phi_i\bar{g}_{kj} - \phi_j\bar{g}_{ki} - 2\phi_k\bar{g}_{ij} = 0 \qquad (*)$$

ein, und bekommen, dass $\bar{g}$ zu g proportional ist.

Was passiert in höheren Dimensionen?

Satz (Kiosak, M$\sim$ 2009:) $n-$**dim vollständige Einsteinmetriken sind geodätisch starr:**
Sei g eine vollständige pseudo-Riemannsche Einsteinmetrik mit nichtkonstanter Krümmung. Dann gilt: jede vollständige Metrik $\bar{g}$, die zu g geodätisch äquivalent ist, ist affin-äquivalent zu g.

Plan meines Vortrags:

- Die Lösung der topologischen Version des Problems von Beltrami
  - Beweis für Dimension 2
  - Beweismethoden für beliebige Dimensionen
- Die Lösung der zwei Probleme von Lie und des Problems von Schouten
- Lösung des Problems von Weyl und Ehlers
- www.minet.uni-jena.de/∼matveev/
- Vielen Dank