Теорема Солодовникова в размерности два

Владимир Сергеевич Матвеев

Аннотация

Если действие связной группы Ли на связной полной римановой поверхности непостоянной кривизны переводит (непараметризованные) геодезические в геодезические, то оно изометрично.

Рассмотрим риманово многообразие (M^n, g) размерности $n \geq 2$.

Определение 1. *Риманова метрика $\bar{g}$ на многообразии M^n называется* **геодезически эквивалентной** *метрике g, если каждая геодезическая метрики g, рассматриваемая как непараметризованная кривая, является геодезической метрики $\bar{g}$.*

Диффеоморфизм $F : M^n \to M^n$ называется **проективным преобразованием** *риманого многообразия (M^n, g), если перенесенная метрика F^*g геодезически эквивалентна метрике g.*

Проективные преобразования римановых поверхностей рассматривались еще Ли в [8], 1882.

Теорема 1 *Пусть группа Ли $(\mathbb{R}, +)$ действует на связной полной римановой поверхности (M^2, g) проективными преобразованиями. Тогда кривизна метрики g постоянна и неотрицательна, или группа действует изометриями.*

Для размерностей больше двух аналогичный результат был доказан Солодовниковым в [14] (в предположении вещественной аналитичности). Техника Солодовникова опирается на специальное строение тензора кривизны для метрик, допускающих геодезически эквивалентные метрики, и неприменима в размерности два (см. [13]). В размерности два, Теорема 1 является отдельной нетривиальной задачей.

Группы проективных преобразований римановых поверхностей постоянной кривизны описаны, фактически, еще Бельтрами в [1]: группа проективных преобразований двумерной сферы постоянной кривизны изоморфна $\pm SL(3, \mathbb{R})$; группа проективных преобразований двумерного эвклидова пространства совпадает с его группой аффинных преобразований $SL(2, \mathbb{R}) \leftthreetimes \mathbb{R}^2$.

Таким образом, Теорема 1 полностью закрывает теорию групп Ли неизометричных проективных преобразований полных римановых поверхностей.

Основным инструментом доказательства является следующее утверждение, доказанное в [10, 11] (многомерную версию смотри в [9, 12]):

Теорема 2. *Римановы метрики g и $\bar{g}$ на поверхности M^2 тогда и только тогда геодезически эквивалентны, когда функция*

$$I : TM^2 \to \mathbb{R}, \quad I(\xi) := \bar{g}(\xi,\xi)\left(\frac{det(g)}{det(\bar{g})}\right)^{2/3}$$

является интегралом геодезического потока метрики g.

Векторное поле v на поверхности M называется **проективным**, если его поток действует проективными преобразованиями. Одно-параметрическое семейство проективных преобразований F_t сразу дает проективное векторное поле $\left(\frac{d}{dt}F_t\right)_{|t=0}$.

Следующее утверждение является инфинитезимальной версией теоремы 2; его доказательство может быть найдено в [15]:

Следствие 1. *Предположим, что векторное поле v проективно по отношению к римановой метрике g на поверхности M^2. Тогда функция $I : TM \to \mathbb{R}$*

$$I(\xi) := -(\mathcal{L}_v g)(\xi,\xi) + \frac{2}{3}\mathrm{trace}(g^{-1}\mathcal{L}_v g)\, g(\xi,\xi),$$

где $\mathcal{L}_v g$ есть производная Ли метрики g вдоль v, является интегралом геодезического потока метрики g.

Заметим, что интеграл I квадратичен по скоростям. Квадратичные интегралы геодезического потока метрики g образуют векторное пространство. Мы обозначим его $\mathcal{I}(M^2, g)$.

Следущее утверждение показывает, что, если метрики g и $\bar{g}$ геодезически эквивалетны, то пространства $\mathcal{I}(M^2, g)$ и $\mathcal{I}(M^2, \bar{g})$ канонически изоморфны.

Лемма 1. *Пусть функция $\bar{I} : TM^2 \to \mathbb{R}$, $\bar{I}(\xi) := \bar{f}(\xi,\xi)$, где $\bar{f}$ билинейная форма, является интегралом геодезического потока римановой метрики $\bar{g}$. Если риманова метрика g геодезически эквивалетна римановой метрике $\bar{g}$, то функция $I(\xi) := \bar{I}(\xi)\left(\frac{det(g)}{det(\bar{g})}\right)^{\frac{2}{3}}$ является интегралом геодезического потока метрики g.*

Следствие 2. *Предположим, что пространство $\mathcal{I}(M^2, g)$ двумерно. Рассмотрим базис $\{I_1, I_2\}$ и множество $\{P \in M^2 : I_{1|T_P M^2} = Konst\, I_{2|T_P M^2}\}$.*

Тогда это множество инвариантно по отношению к проективным преобразованиям.

Доказательство леммы 1: Если метрики геодезически эквивалетны, то перепараметризация

$$r : TM^2 \to TM^2, \quad r(\xi) := \frac{\sqrt{g(\xi,\xi)}}{\sqrt{\bar{g}(\xi,\xi)}}\xi$$

переводит траектории геодезического потока метрики g в траектории геодезического потока метрики $\bar g$. Если функция $\bar I(\xi) := \bar f(\xi,\xi)$ является интегралом геодезического потока метрики $\bar g$, то функция

$$\bar I\left(\frac{\sqrt{g(\xi,\xi)}}{\sqrt{\bar g(\xi,\xi)}}\xi\right) = \frac{g(\xi,\xi)}{\bar g(\xi,\xi)}\bar f(\xi,\xi)$$

является интегралом геодезического потока метрики g. Так как интеграл энергии $g(\xi,\xi)$ и (по теореме 2) функция $\bar g(\xi,\xi)\left(\frac{\det(g)}{\det(\bar g)}\right)^{2/3}$ суть интегралы, то функция $I(\xi) := \bar I(\xi)\left(\frac{\det(g)}{\det(\bar g)}\right)^{\frac{2}{3}}$ тоже является интегралом геодезического потока метрики g, что и требовалось доказать.

Следующее утверждение было доказано Дини в [3], 1869.

Теорема 3. *Предположим, что римановы метрики g и $\bar g$ геодезически эквивалетны на M^2 и непропорциональны в точке $P \in M^2$. Тогда, в некоторой окрестности точки P, существует система координат (x,y), в которой метрики выглядят следующим образом:*

$$\begin{aligned} ds_g^2 &= (X(x)-Y(y))(dx^2+dy^2) & (1)\\ ds_{\bar g^2} &= \left(\frac{1}{Y(y)}-\frac{1}{X(x)}\right)\left(\frac{dx^2}{X(x)}+\frac{dy^2}{Y(y)}\right), & (2)\end{aligned}$$

где функция X (соответственно, Y) зависит только от координаты x (соответственно, y).

Доказательство Теоремы 1: Пусть группа Ли $(\mathbb{R},+)$ действует на связной полной римановой поверхности (M^2,g) проективными преобразованиями F_t. Если пространство $\mathcal{I}(M^2,g)$ одномерно, то любое проективное преобразования является гомотетией, и Теорема 1 следует из результатов [7].

Предположим, что пространство $\mathcal{I}(M^2,g)$ двумерно. Если не все преобразования F_t являются гомотетиями, то существуют такие $t_0 \in \mathbb{R}$ и $P \in M^2$, что метрики g и $g_{t_0} := F_{t_0}^* g$ непропорциональны в точке P.

По теореме 3, существует координатная система (x,y) в некоторой окрестности точки P, в которой метрики g и g_{t_0} задаются формулами (1,2).

Рассмотрим векторное поле $v = (v_1,v_2) := \left(\frac{d}{dt}F_t\right)_{|t=0}$. Оно проективно по отношению к метрикам g и g_{t_0}. Используя лемму 1 и следствие 1, получаем, что производные Ли $\mathcal{L}_v g$ и $\mathcal{L}_v\bar g$ в координатной системе (x,y) диагональны. Явно подсчитывая эти производные Ли, получаем что

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0. \qquad (3)$$

По предположениям, интеграл из следствия 1 является линейной комбинацией интеграла из теоремы 1 и интеграла энергии; прямые вычисления дают нам следующую систему уравнений (для некоторых констант $\alpha \neq 0, \beta$):

$$\left\{\begin{array}{lcl} -\frac{1}{3}X'v_1+\frac{1}{3}Y'v_2+\frac{2}{3}(X-Y)\frac{\partial v_1}{\partial x}-\frac{4}{3}(X-Y)\frac{\partial v_2}{\partial y} &=& (X-Y)(\beta-\alpha Y)\\ -\frac{1}{3}X'v_1+\frac{1}{3}Y'v_2+\frac{2}{3}(X-Y)\frac{\partial v_2}{\partial y}-\frac{4}{3}(X-Y)\frac{\partial v_1}{\partial x} &=& (X-Y)(\beta-\alpha X).\end{array}\right.$$

Используя равенство (3), преобразовывая систему, получаем

$$\begin{aligned} X'v_1 &= \alpha X^2 + bX + c \\ Y'v_2 &= \alpha Y^2 + bY + c, \end{aligned}$$

где b и c – некоторые константы. Заметим, что, ввиду (3), $X'v_1$ и $Y'v_2$ суть производные $\frac{d}{dt}X := \dot{X}$, $\frac{d}{dt}Y := \dot{Y}$. По следствию 2, в каждой точке орбиты $O(P)$ группы $(\mathbb{R},+)$, проходящей через точку P, метрики g_{t_0} и g непропорциональны. Таким образом, мы получаем следующие дифференциальные уравнения на функци X и Y:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= \alpha X(t)^2 + bX(t) + c \\ \dot{Y}(t) &= \alpha Y(t)^2 + bY(t) + c \end{aligned}$$

Эти дифференциальные уравнения были исследованы Солодовниковым в [14]. Он показал что, если $\alpha \neq 0$, то (в трехмерном случае) решения этих уравнений не могут порождать полные римановы метрики непостоянной кривизны; этот результат Солодовникова может быть без особого труда обобщен для двумерного случая. Теорема 1 доказана в предположении двумерности пространства $\mathcal{I}(M^2, g)$.

Оказывается, что размерность пространства $\mathcal{I}(M^2, g)$ может быть больше двух только на поверхностях постоянной кривизны (в предположении существования негомотетичного проективного преобразования): следующая теорема завершает доказательство теоремы 1.

Теорема 4. *Пусть (M^2, g) – полная связная риманова поверхность. Предположим, что полная риманова метрика $\bar{g}$ геодезически эквивалентна и непропорциональна метрике g. Если размерность пространства $\mathcal{I}(M^2, g)$ больше двух, то кривизна метрики g постоянна и неотрицательна.*

В предположении замкнутости поверхности (M^2, g), теорема 4 доказана в [5, 6]. Для незамкнутых поверхностей, теорема 4 нетривиальна. Ее доказательство основано на классификации квадратично-интегрируемых геодезических потоков, полученной в [2, 4], и не будет объяснено в этой работе.

Я благодарен Д. В. Алексеевскому за постановку проблемы. При доказательстве теоремы 4 использовались методы, наработанные на семинаре под руководством А. Т. Фоменко и А. В. Болсинова. Работа была выполнена при поддержке немецкого научного общества (Deutche Forschungsgemeinschaft; SPP 1154).

Список литературы

[1] E. Beltrami, *Resoluzione del problema: riportari i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetische vengano rappresentante da linee rette*, Ann. Mat., **1**(1865), no. 7, pp. 185–204.

[2] А. В. Болсинов, В. С. Матвеев, А. Т. Фоменко, *Двумерные римановы метрики с интегрируемыми геодезическими потоками. Локальныи и глобальныи геометрии,* Матем. Сборник, 1998 **189**:10, с. 1441–1466.

[3] U. Dini, *Sopra un problema che si presenta nella theoria generale delle rappresentazioni geografice di una superficie su un'altra*, Ann. Mat., ser.2, **3**(1869), pp. 269–293.

[4] M. Igarashi, K. Kiyohara, K. Sugahara, *Noncompact Liouville surfaces,* J. Math. Soc. Japan **45**(1993), no. 3, pp. 459–479.

[5] K. Kiyohara, *Compact Liouville surfaces*, J. Math. Soc. Japan **43**(1991), pp. 555-591.

[6] В. Н. Колокольцов, *Полиномиальные интегралы геодезических потоков на компактных поверхностях,* Кандидатская диссертация, МГУ, 1984.

[7] A. Lichnerowicz, *Geometry of groups of transformations,* Noordhoff International Publishing, Leyden, 1977.

[8] S. Lie, *Untersuchungen über geodätische Kurven,* Math. Ann. **20**(1882). Can be found in Sophus Lie Gesammelte Abhandlungen, Band 2, erster Teil, 267–374. Teubner, Leipzig 1935.

[9] V. S. Matveev, P. J. Topalov, *Trajectory equivalence and corresponding integrals*, Regular and Chaotic Dynamics, **3**(1998), no. 2, pp. 30–45.

[10] В. С. Матвеев, П. Й. Топалов, *Геодезическая эквивалентность метрик на поверхностях и их интегрируемость,* ДАН 1999 **367**:6, с. 736–738.

[11] V. S. Matveev and P. J. Topalov, *Metric with ergodic geodesic flow is completely determined by unparameterized geodesics,* Electronic Research Announcments of American Mathematical Society, **6**(2000), pp. 98–104.

[12] Vladimir S. Matveev, Petar J. Topalov, *Geodesic equivalence via integrability,* Geometriae Dedicata **96**(2003), pp. 91–115.

[13] А. С. Солодовников, *Проективные преобразования римановых пространств ,* УМН 1956 **11**:4(70), с. 45–116.

[14] А. С. Солодовников, *Группа проективных преобразований в полном аналитическом римановом пространстве,* ДАН СССР 1969 **186**:6, с. 1262–1265.

[15] P. J. Topalov, *Comutative conservation laws for geodesic flows of metrics admitting projective symmetry*, Math. Research Letters **9**(2002), pp. 65–72.