# Geschlossene hyperbolische 3-Mannigfaltigkeiten sind geodätisch starr

Vladimir S. Matveev*

**Keywords:** Geodesically equivalent metrics, hyperbolic manifolds, integrable systems, projective equivalence
**MSC2000:** 37J35, 53D25, 53B10, 53A20

**Abstract**

Three-dimensional closed hyperbolic manifolds are geodesically rigid: if two metrics have the same geodesics then they are homothetic.

Sei $(M, g)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Metrik $\bar{g}$ auf $M$ heißt *geodätisch äquivalent* zu $g$, wenn jede Geodätische von $g$, betrachtet als unparametrisierte Punktmenge, auch Geodätische von $\bar{g}$ ist.

Es gibt immer das triviale Beispiel von geodätisch äquivalenten Metriken: $g$ ist geodätisch äquivalent zu $\mathrm{Const} \cdot g$. Eine Metrik $g$ heißt *geodätisch starr*, wenn nur triviale geodätische Äquivalenzen möglich sind.

Eine Mannigfaltigkeit $M$ heißt *geodätisch starr*, wenn jede Metrik auf $M$ geodätisch starr ist.

Eine Mannigfaltigkeit $M$ heißt *hyperbolisch*, wenn es eine Metrik mit konstanter Schnittkrümmung (-1) auf $M$ gibt.

**Satz 1.** *Jede geschlossene hyperbolische drei-dimensionale Mannigfaltigkeit ist geodätisch starr.*

Satz 1 bedeutet, daß zwei Metriken auf einer hyperbolischen geschlossenen drei-dimensionalen Mannigfaltigkeit genau dann gleiche Geodätische haben, wenn sie proportional sind.

Satz 1 ist nicht trivial: es gibt Metriken, die nicht geodätische starr sind. Wenn wir zum Beispiel das Produkt von zwei Riemannschen Mannigfaltigkeiten $(M_1, g_1)$ und $(M_2, g_2)$ betrachten, dann sind die Metriken

$$g_1 + g_2 \quad \text{und} \quad g_1 + 2 \cdot g_2$$

auf $M_1 \times M_2$ nicht-trivial geodätisch äquivalent. Zum Beispiel, ist kein Torus $T^n$, $n > 1$, geodätisch starr.

*Mathematisches Institut, Universität Freiburg, 79104 Germany.
Email: matveev@arcade.mathematik.uni-freiburg.de

Satz 1 beschreibt kein lokales Phänomen. Man kann auf jeder Mannigfaltigkeiten eine Metrik $g$ so konstruieren, dass es in der Umgebung von jedem Punkt eine Metrik $\bar{g}$ gibt, die geodätisch äquivalent zu $g$ ist.

Das Analogon zu Satz 1 für Flächen wurde in [3] bewiesen.

Während des Beweises von Satz 1 benutzen wir die Levi-Civitasche lokale Beschreibung der geodätisch äquivalenten Metriken und die Integrabilität von geodätischen Flüsse der geodätisch äquivalenten Metriken. Wir formulieren den Levi-Civitaschen Satz nur für drei-dimensionale Mannigfaltigkeiten.

Seien $g,\ \bar{g}$ Riemannsche Metriken auf $M$. Wir betrachten die Tensoren

$$\begin{aligned} A^i_j &\stackrel{\text{def}}{=} g^{i\alpha}\bar{g}_{\alpha j} \\ L &\stackrel{\text{def}}{=} (\det(A))^{\frac{1}{n+1}} A^{-1}. \end{aligned} \qquad (1)$$

**Satz 2 ([1]).** *Seien $g, \bar{g}$ geodätisch äquivalente Riemannsche Metriken auf $M^3$.*

1. *Falls in jedem Punkt einer offenen Menge $U^3 \subset M^3$ die Zahl der verschiedenen Eigenwerte des Tensors $L$ genau drei ist, dann gibt es für jeden Punkt $P_0 \in U^3$ eine Umgebung $V^3(P_0) \subset U^3$ und Koordinaten $x_1, x_2, x_3$ in $V^3(P_0)$, so daß die Metriken $g, \bar{g}$ durch die folgenden Formeln gegeben sind:*

$$\begin{aligned} ds^2_g &= (\lambda_1(x_1)-\lambda_2(x_2))(\lambda_1(x_1)-\lambda_3(x_3))dx_1^2 \\ &+ (\lambda_2(x_2)-\lambda_1(x_1))(\lambda_3(x_3)-\lambda_2(x_2))dx_2^2 \\ &+ (\lambda_3(x_3)-\lambda_1(x_1))(\lambda_3(x_3)-\lambda_2(x_2))dx_3^2 \\ ds^2_{\bar{g}} &= \frac{(\lambda_1(x_1)-\lambda_2(x_2))(\lambda_1(x_1)-\lambda_3(x_3))}{\lambda_1(x_1)^2\lambda_2(x_2)\lambda_3(x_3)}dx_1^2 \\ &+ \frac{(\lambda_2(x_2)-\lambda_1(x_1))(\lambda_3(x_3)-\lambda_2(x_2))}{\lambda_1(x_1)\lambda_2(x_2)^2\lambda_3(x_3)}dx_2^2 \\ &+ \frac{(\lambda_3(x_3)-\lambda_1(x_1))(\lambda_3(x_3)-\lambda_2(x_2))}{\lambda_1(x_1)\lambda_2(x_2)\lambda_3(x_3)^2}dx_3^2. \end{aligned}$$

   *Hierbei bezeichnet $\lambda_i$ eine glatte Funktion von $x_i$, $i = 1, 2, 3$.*

2. *Falls in jedem Punkt einer offenen Menge $U^3 \subset M^3$ die Zahl der verschiedenen Eigenwerte von $L$ genau zwei ist, dann existiert für jeden Punkt $P_0 \in U^3$ eine Umgebung $V^3(P_0) \subset U^3$ und Koordinaten $x_1, x_2, x_3$ in $V^3(P_0)$, so daß die Metriken $g, \bar{g}$ durch die folgenden Formeln gegeben sind:*

$$\begin{aligned} ds^2_g &= \pm(\lambda_1(x_1)-\lambda)(dx_1^2 + B(x_2,x_3)(dx_2^2+dx_3^2)) \\ ds^2_{\bar{g}} &= \pm\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda_1(x_1)}\right)\left(\frac{dx_1^2}{\lambda_1(x_1)} + \frac{B(x_2,x_3)(dx_2^2+dx_3^2)}{\lambda}\right), \end{aligned}$$

   *Hierbei ist $\lambda_1$ eine glatte Funktion der Variablen $x_1$, $B$ eine glatte Funktion der Variablen $x_2,\ x_3$ und $\lambda$ eine Konstante.*

Die Integrabilität des Geodätischen Flusses von nichtrivial geodätisch äquivalenten Metriken wurde in [6] bewiesen.

Für jedes $t \in R$, betrachten wir den Tensor

$$S_t \stackrel{\text{def}}{=} det(L - t\,\mathrm{Id})\,(L - t\,\mathrm{Id})^{-1}\,. \tag{2}$$

Wir identifizieren $TM^3$ und $T^*M^3$ mit Hilfe von $g$. Die symplektische Form $dp \wedge dq$ auf $T^*M^3$ induziert dann die Poissonsche Klammer auf $TM^3$.

**Satz 3 ([6]).** *Falls die Metriken $g$ und $\bar g$ geodätisch äquivalent sind, so gilt für alle $t_1, t_2 \in R$: die Funktionen*

$$I_{t_i} : TM^n \to R, \quad I_{t_i}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} g(S_{t_i}(\xi), \xi), \quad i = 1, 2 \tag{3}$$

*sind kommutierende Integrale des geodätischen Flusses der Metrik $g$.*

**Bemerkung 1.** *Obwohl der Tensor $(L - t\,\mathrm{Id})^{-1}$ für $t \in Spectrum(L)$ nicht definiert ist, sind der Tensor (2) und die Funktionen (3) immer definieren.*

**Satz 4.** *Sei $(M^n, g)$ vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Metrik $\bar g$ sei geodätisch äquivalent zu $g$. In jedem Punkt $x \in M^n$ betrachten wir die Eigenwerte des Tensors (1)*

$$\lambda_1(x) \le \lambda_2(x) \le ... \le \lambda_n(x).$$

*Dann gilt für alle $i = 1, 2, ..., n-1$ und für alle Paare von Punkten $x, y \in M^n$:*

1. *$\lambda_i(x) \le \lambda_{i+1}(y)$.*
2. *Wenn $\lambda_i(x) < \lambda_{i+1}(x)$, dann $\lambda_i(z) < \lambda_{i+1}(z)$ für fast jeden Punkt $z \in M^n$.*

Dieser Satz wurde in [2] bewiesen; hier wiederholen wir den Beweis für $n = 3$, da wir einen guten Teil dieses Beweises benötigen.

Für alle $(x, \xi) \in TM^3$, seien $t_1(x, \xi) \le t_2(x, \xi)$ die Nullstellen des Polynoms $I_t(x, \xi)$.

**Lemma 1.** *Sei $x \in M^3$. Dann gilt für $i = 1, 2$:*

1. *Für alle $\xi \in T_xM^3$,*

$$\lambda_i(x) \le t_i(x, \xi) \le \lambda_{i+1}(x).$$

*Wenn $\lambda_i(x) = \lambda_{i+1}(x)$, dann $t_i(x, \xi) = \lambda_i(x) = \lambda_{i+1}(x)$.*

2. *Wenn $\lambda_i(x) < \lambda_{i+1}(x)$ dann ist für alle $\tau \in R$ das Lebesguesche Maß der Untermenge*

$$V_\tau \subset T_xM^3, \quad V_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi \in T_xM^3 : t_i(x, \xi) = \tau\},$$

*Null.*

**Beweis:** Im Tangential-Raum $T_xM^3$, gibt es Koordinaten $x_1, x_2, x_3$ so daß die Metrik $g$ durch die Matrix

$$\text{diagonal}(1,1,1)$$

und der Tensor $L$ durch die Matrix

$$\text{diagonal}(\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x))$$

gegeben sind. In diesen Koordinaten hat der Tensor $S_t$ die Matrix

$$\text{diagonal}((\lambda_2 - t)(\lambda_3 - t), (\lambda_1 - t)(\lambda_3 - t), (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t)).$$

Dann hat das Integral $I_t$ folgendes Aussehen:

$$I_t = (\lambda_2 - t)(\lambda_3 - t)p_1^2 + (\lambda_1 - t)(\lambda_3 - t)p_2^2 + (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t))p_3^2 \qquad (4)$$

Wir sehen, daß $I_{\lambda_1}$ nicht negativ ist; $I_{\lambda_2}$ ist nicht positiv und $I_{\lambda_3}$ ist nicht negativ. Deswegen liegt die erste Nullstelle $t_1(x,\xi)$ des quadratischen Polynoms $I_t$ im Interval $[\lambda_1, \lambda_2]$; die zweite Nullstelle $t_2(x,\xi)$ des quadratischen Polynoms $I_t$ liegt im Interval $[\lambda_2, \lambda_3]$, und der erste Teil des Lemmas ist bewiesen.

Die zweite Teil ist trivial – falls das Maß von der Untermenge

$$V_\tau \subset T_xM^3, \quad V_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi \in T_xM^3 : t_i(x,\xi) = \tau\},$$

nicht Null ist, dann ist $t_i(x,\xi) = \tau$ für alle $\xi \in T_xM^3$. Dann gilt $\lambda_i(x) = \lambda_{i+1}(x)$. Hiermit ist das Lemma bewiesen.

**Beweis von Satz 4:** Wir nehmen an, daß die Metriken $g$ und $\bar{g}$ geodätisch äquivalent sind und daß die Mannigfaltigkeit $M^3$ geodätisch vollständig ist. Dann können wir beliebige Punkte $x$ und $y$ mit einer Geodätische $\gamma : R \to M^3$, $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ verbinden. Wir werden diese Geodätische als Kurve $(\gamma, \dot{\gamma}) : R \to TM^3$ im Tangentialbündel $TM^3$ betrachten. Nach Satz 3 ist für jedes $t$ die Funktion $I_t$ konstant auf dieser Kurve. Deswegen sind die Nullstellen $t_1, t_2$ auch konstant auf dieser Kurve. Wegen Lemma 1,

$$\lambda_i(\gamma(0)) \le t_i(\gamma(0), \dot{\gamma}(0)) \quad \text{und} \quad t_i(\gamma(1), \dot{\gamma}(1)) \le \lambda_{i+1}(\gamma(1));$$

so daß $\lambda_i(x) \le \lambda_{i+1}(y)$. Damit ist der erste Teil des Satzes 4 bewiesen.

Sei das Maß der Menge

$$\tilde{V} \subset M^3, \quad \{x \in M^3 : \lambda_i(x) = \lambda_{i+1}(x)\},$$

nicht Null. Wegen des ersten Teils des Satzes 4 ist $\lambda_i(x)$ konstant auf der Menge $\tilde{V}$. Wir nennen diese Konstante $\tau$. Wir beweisen jetzt, daß $\lambda_i(y) = \lambda_{i+1}(y) = \tau$ in jedem Punkt $y \in M^3$. Hierzu verbinden wir den Punkt $y$ und alle Punkte von $\tilde{V}$ durch alle möglichen Geodätische. Wegen Lemma 1 ist für jede dieser Geodätische $t_i$ gleich $\tau$. Das Maß der Menge der Geschwindigkeitsvektoren dieser Geodätischen im Punkt $y$ ist nicht Null; dann können wir der zweiten Teil des Lemmas 1 anwenden und bekommen, daß

$$\lambda_i(y) = \lambda_{i+1}(y) = \tau.$$

Damit ist Satz 4 bewiesen.

**Beweis von Satz 1:** Wir nehmen an, daß die geschlossene zusammenhängende Mannigfaltigkeit $M^3$ hyperbolisch ist und daß die Metriken $g$, $\bar{g}$ geodätisch äquivalent sind. Wie im Beweis des Satzes 4 bezeichnen

$$\lambda_1(x) \le \lambda_2(x) \le \lambda_3(x)$$

die Eigenwerte des Tensors (1).

Nach Satz 4, sind nur folgende Fälle möglich:

1. Es gibt einen Punkt $x \in M^3$, so daß $\lambda_1(x) < \lambda_2(x) < \lambda_3(x)$.
2. In jedem Punkt $x \in M^3$ sind genau zwei Eigenwerte des Tensors (1) gleich.
3. In jedem Punkt $x \in M^3$ sind mindestens zwei Eigenwerte des Tensors (1) gleich, und es gibt einen Punkt $y \in M^3$, so daß
$$\lambda_1(y) = \lambda_2(y) = \lambda_3(y).$$
4. In jedem Punkt $x \in M^3$ sind alle Eigenwerte des Tensors (1) gleich.

Unser Ziel ist zu beweisen, daß nur Fall 4 möglich ist; dann ist die geodätische Äquivalenz trivial.

**Fall 1:** Nach Satz 4 sind in fast jedem Punkt $x \in M^3$ die Eigenwerte $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x)$ verschieden. Deswegen ist der geodätische Fluß integrabel. Viele Resultate lassen erwarten, daß eine hyperbolische Mannigfaltigkeit keinen integrablen geodätischen Fluß hat. Für reell-analytische Metriken mit reell-analytischen Integralen wurde das von Taimanov [5] bewiesen. Wenn unsere Metriken reell-analytisch sind, dann folgt direkt aus [5], daß Fall 1 unmöglich ist. Man kann aber auch für geodätisch äquivalente Metriken, die nicht reell-analytisch sind, den Beweis von Taimanov durchführen und zeigen, daß die Fundamentalgruppe der Mannigfaltigkeit $M^3$ fast kommutativ ist. (Eine Gruppe $G$ heißt *fast kommutativ*, wenn es eine kommutative Untergruppe $H$ gibt, so daß $G/_H$ endlich ist):

Nach Satz 4 gibt es $\tau_1, \tau_2 \in R$, so daß für alle $x \in M^3$ gilt:

$$\lambda_1(x) \le \tau_1 \le \lambda_2(x) \le \tau_2 \le \lambda_3(x).$$

Wir betrachten die Mengen

$$\begin{aligned}
V_{--} &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x \in M^3 : \ \lambda_1(x) \le \tau_1 < \lambda_2(x) \le \tau_2 < \lambda_3(x)\},\\
V_{+-} &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x \in M^3 : \ \lambda_1(x) < \tau_1 \le \lambda_2(x) \le \tau_2 < \lambda_3(x)\},\\
V_{-+} &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x \in M^3 : \ \lambda_1(x) \le \tau_1 < \lambda_2(x) < \tau_2 \le \lambda_3(x)\},\\
V_{++} &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x \in M^3 : \ \lambda_1(x) < \tau_1 \le \lambda_2(x) < \tau_2 \le \lambda_3(x)\}.
\end{aligned}$$

Die Mengen $V_{\pm\pm}$ sind offen; einige von ihnen können leer sein.

Wir zeigen jetzt, daß für jede der Mengen $V_{\pm\pm}$ die Fundamentalgruppe jeder Zusammenhangskomponente fast kommutativ ist. In allen Punkten von $V_{\pm\pm}$ sind die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des Tensors (1) verschieden; deswegen sind die Eigenwerte glatte Funktionen auf $V_{\pm\pm}$. Die Voraussetzungen des Satzes 2 sind erfüllt und in einer Umgebung von jedem Punkt kann man Levi-Civitasche Koordinaten $x_1, x_2, x_3$ finden. Man kann die Vektoren $v_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $v_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}$, $v_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}$ durch die Bedingungen

$$\left\{ \begin{array}{rcl} L(v_i) & = & \lambda_i v_i \\ g(v_1, v_1) & = & (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3) \\ g(v_2, v_2) & = & (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3) \\ g(v_3, v_3) & = & (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3) \end{array} \right. \tag{5}$$

invariant definieren. Als einzige Wahlmöglichkeit haben wir das Vorzeichen der Vektoren.

Wähle eine Zusammenhangskomponente $V$ einer der Mengen $V_{\pm\pm}$. Sei $\tilde{V}$ die universelle Überlagerung dieser Zusammenhangskomponente. Wir können die Vektorfelder $v_1, v_2, v_3$ auf $\tilde{V}$ so finden, daß die Bedingungen (5) erfüllt sind. Die Vektorfelder sind in jedem Punkt der Menge $\tilde{V}$ linear unabhängig. Sie kommutieren. Deshalb können wir die Levi-Civitasche Koordinaten $x_1, x_2, x_3$ auf $\tilde{V}$ global definieren: wähle einen Anfangspunkt $P_0 \in \tilde{V}$ und verbinde jeden Punkt $P \in \tilde{V}$ mit dem Punkt $P_0$ mit einer Kurve auf $\tilde{V}$. Sei die Koordinate $x_i(P)$ die Arbeit des Vektorfeldes $v_i$ entlang der Kurve. Auf der universellen Überlagerung sind alle Wege, die Punkte $P_0$ und $P$ verbinden, homotop, und die Koordinaten des Punkts $P$ sind unabhängig von der Kurve.

Für jedes $i \neq j$ ist die Funktion $\lambda_i$ konstant auf den Integralkurven des Vektorfeldes $v_j$. Deshalb enthält $\tilde{V}$ mit zwei beliebigen Punkten $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ und $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ den ganzen Quader

$$\left\{ \begin{array}{ll} (x_1, x_2, x_3) \in V : & \min(\bar{x}_1, \hat{x}_1) \leq x_1 \leq \max(\bar{x}_1, \hat{x}_1), \\ & \min(\bar{x}_2, \hat{x}_2) \leq x_2 \leq \max(\bar{x}_2, \hat{x}_2), \\ & \min(\bar{x}_3, \hat{x}_3) \leq x_3 \leq \max(\bar{x}_3, \hat{x}_3). \end{array} \right\}$$

Deswegen sind die Koordinaten durch den Punkt eindeutig bestimmt, und $\tilde{V}$ ist homöomorph zu einem Produkt $I_1 \times I_2 \times I_3$, wobei $I_i$ entweder einen offenes Intervall bezeichnet oder eine offene Halbgerade oder eine Gerade mit der Standardkoordinate $x_i$ .

Die Fundamentalgruppe von $V$ wirkt auf der universellen Überlagerung $\tilde{V}$. Die Koordinatenlinien sind invariant bezüglich der Wirkung. Wähle ein Element $\gamma$ der Fundamentalgruppe; sei $\gamma(P_1) = P_2$. Wenn $\gamma$ die Richtungen der Vektoren $v_1, v_2, v_2$ erhält, wirkt $\gamma$ als Translation

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_1(P_2) - x_1(P_1), x_2 + x_2(P_2) - x_2(P_1), x_3 + x_3(P_2) - x_3(P_1)).$$

Also ist die Fundamentalgruppe fast kommutativ.

Wähle einen Punkt $x \in M^3$ so daß $\lambda_1(x) < \lambda_2(x) < \lambda_3(x)$, und betrachte die Zusammenhangskomponenten der Mengen $V_{\pm\pm}$ die den Punkt $x$ enthalten.

Davon gibt es maximal vier. Wir zeigen jetzt, daß jedes Element der Fundamentalgruppe $\pi_1(M^3)$ in einer von diesen Komponenten realisiert werden können.

Nach dem Satz von Hopf-Rinow kann man jedes Element der Gruppe $\pi_1(M^3)$ durch eine geodätische Schleife $\gamma$, $\gamma(0) = \gamma(1) = x$, darstellen. Wir betrachten diese Geodätische als Kurve $(\gamma, \dot\gamma)$ in $TM^3$. Die Nullstellen $t_1, t_2$ des Polynoms $I_t$ sind konstant auf $(\gamma, \dot\gamma)$. Falls $t_1(\gamma, \dot\gamma) \neq \tau_1$ und $t_2(\gamma, \dot\gamma) \neq \tau_2$ sind, dann liegt die Geodätische $\gamma$ schon in einer der Mengen $V_{\pm\pm}$. Beispielsweise, wenn $t_1(\gamma, \dot\gamma) < \tau_1$ und $t_2(\gamma, \dot\gamma) < \tau_2$ sind dann liegen nach Lemma 1 alle Punkte der Geodätische $\gamma$ in der Menge $V_{++}$. Falls $t_1(\gamma, \dot\gamma) = \tau_1$ oder $t_2(\gamma, \dot\gamma) = \tau_2$ sind, dann können wir den Geschwindigkeitsvektor $\dot\gamma(0)$ etwas stören und die neue Geodätische $\gamma_\epsilon$, $\gamma_\epsilon(0) = x$, $|\dot\gamma_\epsilon(0) - \dot\gamma(0)| = \epsilon << 1$, betrachten, so daß $t_1(\gamma_\epsilon, \dot\gamma_\epsilon) \neq \tau_1$ und $t_2(\gamma_\epsilon, \dot\gamma_\epsilon) \neq \tau_1$. Wenn $\epsilon$ klein genug ist, liegt der Punkt $\gamma_\epsilon(1)$ in einer zusammenziehbaren Umgebung $U(x) \subset V_{\pm\pm}$ von $x$. Wir können die Punkte $x$ und $\gamma_\epsilon(1)$ mit einer Kurve $\gamma_0 \subset U(x)$ verbinden. Dann sind die Kurve $\gamma$ und die Kurve, die aus $\gamma_\epsilon$ und $\gamma_0$ zusammengesetzt ist, homotop. Also kann jedes Element der Fundamentalgruppe $\pi_1(M^3)$ in einer der Zusammenhangskomponenten der Mengen $V_{\pm\pm}$, die den Punkt $x$ enthalten, realisiert werden.

Deswegen ist die Fundamentalgruppe von $M^3$ endliche Vereinigung von fast kommutativen Untergruppen und damit selbst fast kommutativ. Dann gibt es eine endliche Überlagerung $\tilde M^3$ mit kommutativer Fundamentalgruppe. Jede endliche Überlagerung der geschlossenen hyperbolischen Mannigfaltigkeit ist auch eine geschlossene hyperbolische Mannigfaltigkeit. Nach [4] ist die Fundamentalgruppe einer geschlossenen hyperbolischen Mannigfaltigkeit nicht kommutativ. Der Widerspruch zeigt daß Fall 1 unmöglich ist.

**Fall 2:** Wir nehmen an, daß die geschlossene Mannigfaltigkeit $M^3$ hyperbolisch ist, daß die Metriken $g$ und $\bar g$ auf $M^3$ geodätisch äquivalent sind und daß für alle Punkte $x \in M^3$ gilt:

$$\lambda_1(x) < \lambda_2(x) = \lambda_3(x) = const \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lambda.$$

Dann gibt es einen Widerspruch: Wir werden zeigen, daß es eine stetige Abbildung $a : T^2 \to M^3$ gibt, so daß der Kern der induzierten Abbildung

$$a_* : \pi_1(T^2) \to \pi_1(M^3)$$

nur eine endliche Untergruppe ist; daß widerspricht der Hyperbolizität.

Der Eigenwert $\lambda_1$ ist isoliert; deswegen ist $\lambda_1$ eine glatte Funktion auf $M^3$. Wir betrachten die Metrik

$$\tilde g \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{(\lambda - \lambda_1(x))} g.$$

In den Levi-Civitaschen Koordinaten $x_1, x_2, x_3$ von Satz 2, hat die Metrik $\tilde g$ das folgende Aussehen:

$$dx_1^2 + B(x_2, x_3)(dx_2^2 + dx_3^2).$$

Man kann den Vektor $v = \frac{\partial}{\partial x_1}$ durch die Bedingungen

$$\left\{ \begin{array}{rcl} L(v) & = & \lambda_1 \; v \\ \tilde{g}(v,v) & = & 1 \end{array} \right. \tag{6}$$

invariant definieren. Als einzigen Wahlmöglichkeit haben wir das Vorzeichen des Vektors $v$. Deswegen können wir auf einer endlichen Überlagerung $\tilde{M}^3$ das Vektorfeld $v$ so finden, daß es die Bedingungen (6) erfüllt.

Dann ist dieses Vektorfeld $v$ ein Killing-Vektorfeld für $\tilde{g}$, und die 1-Form

$$\omega(*) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{g}(v,*)$$

ist geschlossen. Dann ist die Abbildung $\aleph : \pi_1(\tilde{M}^3) \to R$,

$$\aleph(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\gamma \omega$$

ein Charakter der Gruppe $\pi_1(\tilde{M}^3)$. Dann gilt für alle $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi_1(\tilde{M}^3)$:

$$\aleph(\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{(-1)}\gamma_2^{(-1)}) = \aleph(\gamma_1) + \aleph(\gamma_2) - \aleph(\gamma_1) - \aleph(\gamma_2) = 0.$$

Der Kommutator $[\pi_1(\tilde{M}^3), \pi_1(\tilde{M}^3)]$ ist nicht trivial; deswegen gibt es nicht-triviale Kurven $\gamma$ so daß $\aleph(\gamma)$ immer Null ist. Wir realisieren eine dieser Kurven als eine geschlossenen Geodätische (wir nennen diese Geodätische auch $\gamma$). Dann ist für alle $x \in \gamma$ der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\gamma}(x)$ orthogonal zu $v$. Tatsächlich ist das Skalarprodukt $\tilde{g}(\dot{\gamma}, v)$ konstant. Deswegen muß es Null sein.

Wir betrachten den Fluß $F_t$ des Vektorfeldes $v$. Wir wahlen eine beliebig dünn Tuben-Umgebung $U^3(\gamma)$ der Geodätische $\gamma$. Wir werden zeigen, daß es eine $\tau \in R$, $\tau \geq 1$ gibt, so daß $F_\tau(\gamma)$ liegt der Umgebung $U^3(\gamma)$ liegt.

Wir betrachten einen Punkt $x \in \gamma$ und den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\gamma}(x)$ und konstruiren die Folge

$$(F_1(x), dF_1(\dot{\gamma}(x)), (F_2(x), dF_2(\dot{\gamma}(x))), \ldots \quad .$$

von Punkten in $T\tilde{M}^3$. Für alle $t$ ist die Abbildung $F_t$ eine Isometrie. Deswegen ist $\tilde{g}(dF_i(\dot{\gamma}(x)), dF_i(\dot{\gamma}(x)))$ eine Konstante $K$. Deswegen liegt unsere Folge $(F_i(x), dF_i(\dot{\gamma}(x)))$ in der kompakten Menge

$$O\tilde{M}^3 \stackrel{\text{def}}{=} \{(y,\xi) \in T\tilde{M}^3 \;:\; \tilde{g}(\xi,\xi) = K\}.$$

Jede Folge auf einem Kompaktum hat eine Cauchy Teilfolge. Dann gibt es für alle $\epsilon > 0$ das Paar $k < m \in N$, so daß

$$\text{Distanz}\left((F_k(x), dF_k(\dot{\gamma}(x)))\,, (F_m(x), dF_m(\dot{\gamma}(x)))\right)$$

kleiner ist als $\epsilon$. Dann ist der Abstand zwischen $(F_{m-k}(x, dF_{m-k}(\dot{\gamma}(x))) \in T\tilde{M}^3$ und $(x, \dot{\gamma}(x))$ auch kleiner als $\epsilon$. Dann gibt es ein $n \in N \subset R$ so daß $F_n(\gamma)$ in der Umgebung $U^3(\gamma)$ liegt. Dann sind die zwei Kurven, $\gamma$ und $F_n(\gamma)$, in der Umgebung $U^3(\gamma)$ isotop. Deswegen kann man einen Zylinder

$$Z_1 = S^1 \times [-1, 1]$$

finden, so daß dieser in $U^3(\gamma)$ liegt und die Grenzen des Zylinders die Kurven $\gamma$ und $F_n(\gamma)$ sind. Wir betrachten noch den Zylinder

$$Z_2 = \{F_t(\gamma), \quad t \in R, \quad 0 \le t \le n\}.$$

Die Vereinigung dieser beiden Zylinder ist ein Torus $T^2$. Jetzt werden wir zeigen, daß die Abbildung $Id_* : \pi_1(T^2) \to \pi_1(\tilde{M}^3)$ eine Injektion ist.

Die Gruppe $\pi_1(T^2)$ ist $Z + Z$. Ihre Generatoren sind die Kurve $\gamma$ und die Kurve $\delta$, die zuerst entlang dem Generator des Zylinderes $Z_2$ gehet und danach entlang dem Generator des Zylinderes $Z_1$. Nehmen wir an, daß $\delta^{m_1}\gamma^{m_2}$ eine zusammenziehbar Kurve auf $\tilde{M}^3$ ist. Dann

$$0 = \aleph(\delta^{m_1}\gamma^{m_2}) \approx nm_1$$

und $m_1 \equiv 0$. Die universelle Überlagerung einer hyperbolischen 3-Mannigfaltigkeit ist $R^3$; deswegen hat die Fundamentalgruppe keine Elemente von endlichem Grad. Deswegen ist $m_2 \equiv 0$ und ist Fall 2 ausgeslossen.

**Fall 3:** In jedem Punkt $x \in M^3$ sind mindestens zwei Eigenwerte des Tensors (1) gleich, und es gibt $y \in M^3$, so daß $\lambda_1(y) = \lambda_2(y) = \lambda_3(y)$. Nach Satz 4 sind die gleiche Eigenwerte konstant. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß in jedem Punkt $x \in M^3$,

$$\lambda_1(x) \le \lambda_2(x) = \lambda_3(x) = const \overset{\text{def}}{=} \lambda.$$

Dann hat das Polynom (4) das folgende Aussehen:

$$I_t = (\lambda - t)^2 p_1^2 + (\lambda_1(x) - t)(\lambda - t)(p_2^2 + p_3^2).$$

Für alle $t$ ist das Polynom

$$\tilde{I}_t \overset{\text{def}}{=} \frac{I_t}{(\lambda - t)} = (\lambda - t)p_1^2 + (\lambda_1(x) - t)(p_2^2 + p_3^2)$$

ein Integral des geodätischen Flusses der Metrik $g$. Dann ist die Funktion

$$\tilde{I}_\lambda = (\lambda_1(x) - \lambda)(p_2^2 + p_3^2)$$

auch ein Integral.

Für alle Geodätische $\gamma$ durch den Punkt $y$ gilt nach Lemma 1: $\tilde{I}_\lambda \equiv 0$. Dann muß für alle $x \in \gamma$, für die $\lambda_1(x) \neq \lambda$ gilt, $(p_2^2 + p_3^2)$ Null sein. Das bedeutet, daß der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\gamma}(x)$ ein Eigenvektor des Tensors (1) mit dem Eigenwert $\lambda_1(x)$ ist. Dann können sich zwei beliebiege Geodätische, die durch $y$ gehen, können nur in solchen Punkten $z$ schneiden, für die $\lambda_1(z) = \lambda$ gilt. Deswegen ist $M^3$ entweder $S^3$ oder $RP^3$, und Fall 3 ist auch ausgeschlossen.

Hiermit ist der Satz 1 bewiesen.

**Vermutung 1.** *Jede geschlossene hyperbolische Mannigfaltigkeit ist geodätisch starr.*

Ich möchte mich bei V. Bangert, N. A'Campo, D. Hug und S. Schöllhammer für Diskussionen und grammatische Verbesserungen bedanken.

# References


[1] T. Levi-Civita, *Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche*, Ann. di Mat., serie $2^a$, **24**(1896), 255–300.

[2] Vladimir S. Matveev, Petar J, Topalov, *Geodesic equivalence via integrability,* Preprint INIMS NI00018-SGT, **2000**.

[3] V. S. Matveev and P. J. Topalov, *Metric with ergodic geodesic flow is completely determined by unparameterized geodesics,* ERA-AMS, **6**(2000).

[4] A. Preissman, *Quelques propriétés globales des espaces de Riemann,* Comment. Math. Helv. **15**(1943) 175–216.

[5] I. A. Taimanov, *Topological obstructions to the integrability of geodesic flow on nonsimply connected manifold*, Math.USSR-Izv., **30**(1988), no. 2, 403–409.

[6] P. J. Topalov and V. S. Matveev, *Geodesic equivalence and integrability*, Preprint series of Max-Planck-Institut f. Math. no. 74(**1998**).