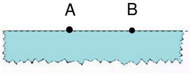
Konstruktionen mit Zirkel und Lineal und Bausteinkonstruktionen:

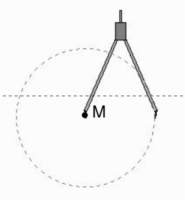
Frage: (Euklid) Welche geometrischen Objekten sind allein mit Zirkel und Lineal konstruierbar?
Regeln (zuerst nichtformal; auf übernächster Folie sind sie formalisierter dargestellt):
Gegeben sind: Ein (in alle Richtungen unendliches) Papierblatt; ein (unendliches) Lineal ohne Maßstab und ein (unendlich grosser) Zirkel. Es ist erlaubt, dass bereits irgendwelche Objekte („geometrische Gebilde") auf dem Papierblatt eingezeichnet sind: Z.B. sind auf dem Blatt später zwei Punkte mit Abstand 1 vorhanden. Wenn nichts gesagt wird, werden wir annehmen, dass das Blatt leer ist.

Was können wir tun:

Sind zwei verschiedene Punkte A, B gegeben, können wir die (perfekte unendliche) Gerade durch sie zeichnen.

Sind drei Punkte $A \neq B,\ M$ gegeben, können wir einen Kreis mit Radius $|AB|$ um M zeichnen.





Wenn die Schnittpunkte von zwei Geraden, Geraden und einem Kreis oder zweier Kreise existieren und die Anzahl davon endlich ist, können wir einen Schnittpunkt (oder mehrere Schnittpunkte) wählen. Auch wenn auf dem Blatt irgendein Objekt vor der Konstruktion vorhanden ist, können wir die Schnittpunkte der von uns konstruierten Geraden oder Kreise mit dem Objekt bestimmen.

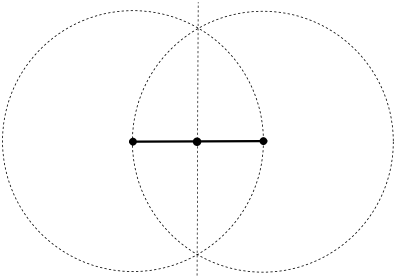
(Damit wir überhaupt anfangen können, können wir einen Punkt des Blattes wählen.)

Alle Konstruktionen die wir durchführen sind ideal (=exakt; es gibt keinen Fehler).

Dasselbe ein bisschen formaler:

Wir definieren den Begriff „konstruierbar“ durch die folgenden Festlegungen:
(a) Die Gerade durch zwei verschiedene gegebene Punkte ist konstruierbar. (b) Der Kreis um einen gegebenen Punkt dessen Radius gleich dem Abstand zwischen zwei gegebenen Punkten ist, ist konstruierbar.(c) Der Schnittpunkt von zwei sich schneidenden Geraden, (d) die Schnittpunkte eines gegebenen Kreises und einer den Kreis schneidenden gegebenden Geraden, (e) und die Schnittpunkte von zwei sich schneidenden gegebenen Kreisen sind konstruierbar.
Geometrische Gebilde (wie z.B. Punkte, Geraden, Strecken, Kreise, Dreiecke, Polygone,) die jeweils durch eine endliche Punktmenge festgelegt werden können, wollen wir vorübergehend als „Objekte“ bezeichnen. Wir sagen dann, das Objekt a sei bei Vorgabe der Objekte $a_1, \ldots, a_k$ *konstruierbar*, wenn es Objekte $a_{k+1}, \ldots, a_n = a$ gibt, so dass a_j bei Vorgabe der Objekte $a_1, \ldots, a_{j-1}$ konstruierbar ist für $j = k+1, \ldots, n$.

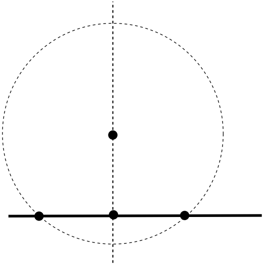
Bausteinkonstruktion: Mittelpunkt und Mittelsenkrechte.



Gegeben ist die Strecke AB. Man zeichne die Kreise um A und B mit (gleichenm) Radius $|AB|$.
Die Gerade durch Schnittpunkte der Kreise ist die Mittelsenkrechte. Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten mit AB ist der Mittelpunkt von AB.

Bausteinkonstruktion: Senkrechte durch einen gegebenen Punkt

Wir haben die Mittelsenkrechte konstruiert, also die Gerade, die zur gegebenen Strecke orthogonal ist und deren Schnittpunkt der Mittelpunkt der gegebenen Strecke AB ist.
Deswegen ist die Senkrechte durch einen gegebenen Punkt einer gegebenen Geraden konstruierbar:

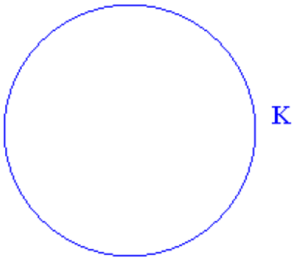


Gegeben sind ein Punkt und eine Gerade. Wir zeichnen einen Kreis mit einem beliebigen Radius um den Punkt. Der Punkt ist dann nach Konstruktion der Mittelpunkt der Stecke mit Endpunkten in den Schnittpunkten des Kreises mit der Geraden.

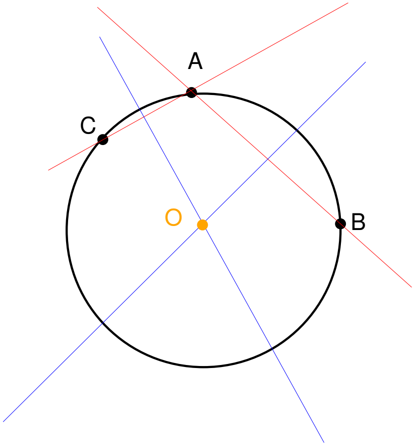
Für diese Strecke konstruieren wir die Mittelsenkrechte (wie auf vorheriger Folie beschrieben wurde). Sie ist die Gerade, die zur gegebenen Geraden orthogonal ist und durch den gegebenen Punkt geht.
Analog gilt: Lot eines Punktes auf einer Gerade ist konstruierbar.

Bausteinkonstruktion: Mittelpunkt eines Kreises

Gegeben sei ein Kreis K ohne seinen Mittelpunkt. Konstruieren Sie den Mittelpunkt



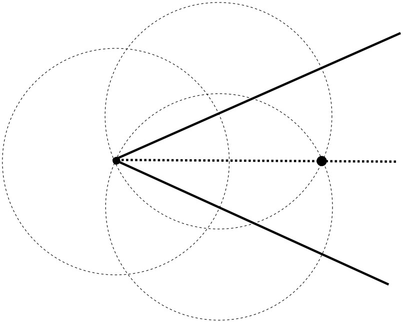
Konstruktion



Man wähle drei Punkte A, B, C auf dem Kreis. Man zeichne die Geraden AB und AC. Man zeichne die Mittelsenkrechte für die Strecken AB und AC. Der Schnittpunkt O der Strecken ist der Mittelpunkt des Kreises.

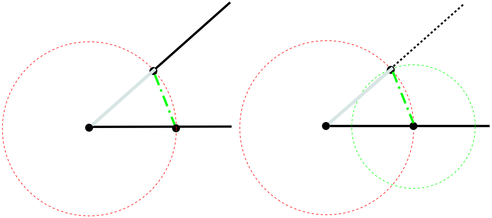
Bausteinkonstruktion: Winkelhalbierende eines gegebenen Winkels

Konstruktionsidee: Die beiden Schenkel liegen symmetrisch bzgl. der Winkelhalbierenden.



Bausteinkonstruktion: An einem gegebenen Strahl ist vom Anfangspunkt aus der Winkel abzutragen, der die gleiche Größe hat wie ein gegebener Winkel.

Konstruktionsidee: Zu gleichgroßen Sehnen gehören in gleichgroßen Kreisen gleichgroße Mittelpunktswinkel.



Bausteinkonstruktion: Parallelgerade

Ähnlich: Eine Gerade durch einen gegebenen Punkt, die zu einer gegebenen Geraden parallel ist, ist konstruierbar.