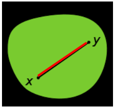
Plan

- Neues Thema: Konvexgeometrie
- Definitionen
- Schwerpunkt
- Konvexe Hülle und Satz über Äquivalenz von zwei Definitionen

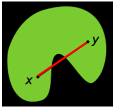
Konvexe Mengen

Def. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvex, wenn sie mit je zwei Punkten x, y auch stets deren Verbindungsstrecke

$$\overline{xy} = \{x + t \cdot \overrightarrow{xy} \mid 0 \leq t \leq 1\} = \{(1-t)x + ty \mid 0 \leq t \leq 1\} \text{ enthält.}$$



k o n v e x



n i c h t k o n v e x

Lemma 25.

Der Durchschnitt von konvexen Mengen ist konvex.

Beweis. Wir betrachten konvexe Mengen K_α, $\alpha \in \mathcal{A}$; wir müssen zeigen, dass $\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} K_\alpha$ konvex ist, d.h. wir müssen zeigen, dass $\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} K_\alpha$ mit je zwei Punkten x, y die ganze Strecke $\overline{xy}$ enthält. Angenommen, die Punkte x, y liegen im Durschnitt der konvexen Mengen K_α, $\alpha \in \mathcal{A}$. Dann liegt auch die Strecke $\overline{xy}$ in allen K_α. Deswegen liegt diese Strecke im Durchschnitt $\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} K_\alpha$ $\square$

Drei Definitionen der konvexen Hülle und Äquivalenzsatz:

Def. (a) Die konvexe Hülle von A ist die Menge
$conv_{(a)}(A) := \{\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_k x_k \mid \lambda_1 + ... + \lambda_k = 1 \ , \lambda_i \geq 0, x_i \in A\}$.

Def. (b) Die konvexe Hülle von A ist der Durchschnitt von allen konvexen Mengen, die A enthalten:

$$conv_{(b)}(A) = \bigcap_{\substack{C \supseteq A \\ C \text{ ist konvex}}} C.$$

Satz (über der konvexen Hülle). Die Definitionen (a), (b) sind äquivalent: ist eine Menge eine konvexe Hülle nach einer Definition, so ist sie auch eine konvexe Hülle nach den anderen Definitionen.

Vor dem Beweis machen wir Exkurs zum Thema "Schwerpunkt"; in Hausaufgaben werden Sie die Schwerkpunktmethode in der Elementargeometrischen Aufgaben anwenden.

Exkurs: Schwerpunkt

Seien $x_1, ..., x_k$ Punkte des Raumes $\mathbb{R}^n$, und $m_1, ..., m_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass mind. ein $m_i > 0$.

Def. Der Schwerpunkt von $x_1, ..., x_k$ mit Massen $m_1, ..., m_k$ ist der Punkt $a + \frac{1}{\sum_{i=1}^k m_i} \sum_{i=1}^k m_i \overrightarrow{ax_i} = a + \frac{1}{\sum_{i=1}^k m_i} \sum_{i=1}^k m_i (x_i - a)$.

Lemma 26 Schwerpunkt hängt nicht von der Wahl des Punktes a ab.

Beweis.

$$\begin{aligned}
b + \frac{1}{\sum_{i=1}^k m_i} \sum_{i=1}^k m_i \overrightarrow{bx_i} &= a + \overrightarrow{ab} + \frac{1}{\sum_{i=1}^k m_i} \sum_{i=1}^k m_i \overrightarrow{bx_i} \\
&= a + \frac{1}{\sum_{i=1}^k m_i} \left(\sum_{i=1}^k m_i \overrightarrow{ab} + \sum_{i=1}^k m_i \overrightarrow{bx_i} \right) \\
&= a + \frac{1}{\sum_{i=1}^k m_i} \sum_{i=1}^k m_i (\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bx_i}) \\
&= a + \frac{1}{\sum_{i=1}^k m_i} \sum_{i=1}^k m_i \overrightarrow{ax_i}.
\end{aligned}$$

Bemerkung. Die Eigenschaft „Schwerpunkt zu sein“ ist eine affine Eigenschaft: ist $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine affine Abbildung, dann ist der Schwerpunkt von $F(x_1), ..., F(x_k)$ (mit Massen $m_1, ..., m_k$) das Bild des Schwerpunktes von $x_1, ..., x_k$ (mit denselben Massen $m_1, ..., m_k$). In der Tat, sei $F(x) = Ax + b$ für eine $m \times n$-Matrix A und $b \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt:

$$F(x) - F(y) = Ax + b - Ay - b = A(x - y) \qquad (*)$$

Wir setzen $(*)$ in die Definition des Schwerpunktes von $F(x_1), ..., F(x_k)$ (mit Massen $m_1, ..., m_k$ und “Anfangspunkt” $a = F(\vec{0})$) ein und erhalten:

$$F(\vec{0}) + \frac{1}{\sum_{i=1}^k m_i} \sum_{i=1}^k m_i(F(x_i) - F(\vec{0}))$$

$$\overset{(*)}{=} b + \frac{1}{\sum_{i=1}^k m_i} \sum_{i=1}^k m_i(A(x_i - \vec{0})) = b + A\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^k m_i} \sum_{i=1}^k m_i x_i\right)$$

$$= F\left(\underbrace{\vec{0} + \frac{1}{\sum_{i=1}^k m_i} \sum_{i=1}^k m_i x_i}_{\text{Schwerpunkt von } x_1, ..., x_k}\right)$$

Lemma 27. Seien $x_1, ..., x_k$ und $y_1, ..., y_r$ Punkte; m_{x_1}, ..., m_{x_k}, m_{y_1}, ..., m_{y_r} die Massen, s.d. $m_{x_1} + ... + m_{x_k} > 0$ und $m_{y_1} + ... + m_{y_r} > 0$. Der Schwerpunkt von $x_1, ..., x_k$ sei S_x. Der Schwerpunkt von $y_1, ..., y_r$ sei S_y. Dann gilt: Der Schwerpunkt von dem Punktepaar S_x und S_y mit Massen $\sum_{i=1}^k m_{x_i}$ und $\sum_{i=1}^r m_{y_i}$ ist gleich dem Schwerpunkt der Punkte $x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_r$ mit Massen m_{x_1}, ..., m_{x_k}, m_{y_1}, ..., m_{y_r}.

Beweis. Wir berechnen die beiden Schwerpunkte und stellen fest, dass sie zusammenfallen. Nach Lemma 26 können wir einen beliebigen Punkt als den Punkt a in der Formel

$$a + \frac{1}{\sum_{i=1}^k m_{x_i} + \sum_{j=1}^r m_{y_j}} \left(\sum_{i=1}^k m_{x_i} \overrightarrow{ax_i} + \sum_{j=1}^r m_{y_j} \overrightarrow{ay_j} \right) (*)$$

wählen; wir nehmen $a = S_x$. Da S_x Schwerpunkt von $x_1, ..., x_k$ ist, ist $S_x + \frac{1}{\sum_{i=1}^k m_{x_i}} \sum_{i=1}^k m_{x_i} \overrightarrow{S_x x_i} = S_x$, folglich $\sum_{i=1}^k m_{x_i} \overrightarrow{S_x x_i} = \vec{0}$.
Dann ist die ist $(*)$ gleich

$$S_x + \frac{1}{\sum_{i=1}^k m_{x_i} + \sum_{j=1}^r m_{y_j}} \left(\sum_{j=1}^r m_{y_j} \overrightarrow{S_x y_j} \right).$$

Wenn wir den Schwerpunkt von $y_1, \dots, y_r$ berechnen, bekommen wir

$$S_y = S_x + \frac{1}{\sum_{j=1}^r m_{y_j}} \sum_{j=1}^r m_{y_j} \overrightarrow{S_x y_j}, \quad \text{also} \quad \overrightarrow{S_x S_y} = \frac{1}{\sum_{j=1}^r m_{y_j}} \sum_{j=1}^r m_{y_j} \overrightarrow{S_x y_j},$$

und deswegen

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^k m_{x_i} + \sum_{j=1}^r m_{y_j}} \left(\sum_{j=1}^r m_{y_j} \overrightarrow{S_x y_j} \right) = \frac{\sum_{j=1}^r m_{y_j}}{\sum_{i=1}^k m_{x_i} + \sum_{j=1}^r m_{y_j}} \overrightarrow{S_x S_y}.$$

Dann ist die Formel $(*)$ gleich

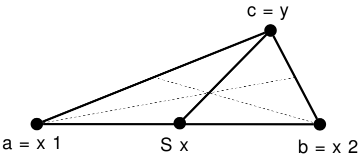
$$S_x + \frac{\sum_{i=1}^k m_{x_i}}{\sum_{i=1}^k m_{x_i} + \sum_{j=1}^r m_{y_j}} \vec{0} + \frac{\sum_{j=1}^r m_{y_j}}{\sum_{i=1}^k m_{x_i} + \sum_{j=1}^r m_{y_j}} \overrightarrow{S_x S_y},$$

und dies ist die Formel für den Schwerpunkt der zwei Punkte S_x, S_y mit Massen $\sum_{i=1}^k m_{x_i}$, $\sum_{j=1}^r m_{y_j}$, $\square$

Beispiel: Schwerpunkt eines Dreiecks

Folgerung. Man betrachte die Eckpunkte a, b, c eines Dreiecks mit Massen $m_a = 1$, $m_b = 1$, $m_c = 1$. Dann ist der Schwerpunkt der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden. Ferner gilt: der Schnittpunkt teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis $1 : 2$.

Beweis. Wir nehmen $k = 2$, $x_1 = a, x_2 = b$ und $r = 1$, $y_1 = c$. Dann ist $S_x = \frac{1}{1+1}(a+b) = \frac{1}{2}(a+b)$. Wir sehen, dass S_x der Mittelpunkt der Seite $\overline{ab}$ ist, deswegen ist $\overline{S_x c}$ eine Seitenhalbierende.



Offensichtlich ist $S_y = \frac{1}{1}c = c$.
Dann ist nach Lemma 26 (wir nehmen S_x als Fußpunkt)

$$S = S_x + \frac{1}{2+1}\left(2 \cdot \overrightarrow{S_x S_x} + 1 \cdot \overrightarrow{S_x S_y}\right) = S_x + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{S_x S_y}.$$

Wir sehen, dass der Schwerpunkt auf der Seitenhalbierenden die vom Punkt c ausgeht liegt, und dass er die Seitenhalbierende im Verhältnis $1 : 2$ teilt. Analog zeigt man, dass der Schwerpunkt auch auf allen anderen Seitenhalbierenden liegt (und sie im Verhältnis $1 : 2$ teilt). Deswegen ist der Schwerpunkt der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, $\square$

Schwerpunkt versus konvexe Kombination:

Def. Seien $x_1, ..., x_k \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ s.d. $\lambda_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Die konvexe Kombination von $x_1, ..., x_k$ mit Koeffizienten $\lambda_1, ..., \lambda_k$ ist der Punkt $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$.

Einfach zu sehen: ein Schwerpunkt mit Massen m_k, so dass $\sum m_k = 1$ ist eine konvexe Kombination.

In der Tat, als Punkt a können wir nach Lemma 26 den Punkt $\vec{0}$ nehmen.
Dann gilt: $S_x := \frac{1}{\sum_{i=1}^k m_i} \sum_{i=1}^k m_i x_i$, und das ist Definition der konvexen Kombination.

Sei S_x ein Schwerpunkt von $x_1, ..., x_k$ mit Massen $m_1, ..., m_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass mind. ein $m_i > 0$. Dann ist S_x eine konvexe Kombination von $x_1, ..., x_k$ mit Koeffizienten $\frac{m_1}{M}, ..., \frac{m_k}{M}$, wobei $M := \sum_{i=1}^k m_i$.

Beweis des Satzes über der konvexen Hülle: $conv_{(a)} = conv_{(b)}$

Wir beweisen zuerst das folgende Lemma.

Lemma 28. Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann konvex, wenn für alle $k \in \mathbb{N}$, für alle $x_1, ..., x_k \in A$ und für alle $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ mit $\sum_i \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$ gilt:

$$\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_k x_k \in A \qquad (*)$$

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $x_1, x_2 \in A$. Wir nehmen $k = 2$ und $\lambda_1 = (1 - t)$, $\lambda_2 = t$. Dann sind (für $t \in [0, 1]$) $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ genau die Punkte der Strecke, die x_1 und x_2 verbindet. Falls $(*)$ erfüllt ist, liegen sie in A und damit ist die Menge A konvex.

Lemma 28. Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann konvex, wenn für alle $k \in \mathbb{N}$, für alle $x_1, \ldots, x_k \in A$ und für alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ mit $\sum_i \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$ gilt:

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k \in A \qquad (*)$$

Beweis $\Longrightarrow$: Angenommen A ist konvex.
Zuerst bemerken wir, dass $\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_k x_k$ genau der Schwerpunkt der Punkte $x_1, ..., x_k$ mit Massen $\lambda_1, ..., \lambda_k$ ist (weil $\sum_i \lambda_i = 1$). Falls wir alle Massen mit derselben Konstanten multiplizieren,ändern wir den Schwerpunkt nicht, weil diese Konstante in der Formel

$$S := \vec{0} + \sum_i \frac{m_i}{\sum_j m_j} x_i$$

im Zähler und im Nenner erscheint (siehe auch Abschnitt: Schwerpunkt versus konvexe Kombination). Also müssen wir beweisen, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ und für alle Massen $m_1, ..., m_k$ der Schwerpunkt von $x_1, ..., x_k \in A$ mit Massen $m_1, ..., m_k$ wieder in A liegt.

Induktion nach k. Induktionsanfang: für $k = 2$ ist das offensichtlich: in dem Fall liegt der Schwerpunkt auf der Verbindungsstrecke $\overline{x_1 x_2} = \{(1-t)x_1 + tx_2 \mid t \in [0,1]\}$ und diese liegt in A da A konvex ist.

Induktionsschritt $k-1 \mapsto k$. Es seien $x_1, ..., x_k \in A$ und $m_1, ..., m_k \geq 0$ mit $k > 2$, $\sum_i m_i > 0$.

Sei S der Schwerpunkt von $x_1, ..., x_{k-1}$ mit Massen $m_1, ..., m_{k-1}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $S \in A$.
Nach Lemma 27 ist der Schwerpunkt von $x_1, ..., x_k$ (mit Massen $m_1, ..., m_k$) der Schwerpunkt von $S \in A$, $x_k \in A$ mit Massen jeweils $m_1 + ... + m_{k-1}$ und m_k.
Nach Induktionsvoraussetzung liegt der Schwerpunkt dann in A, $\square$

$(a) \iff (b)$

Satz. Die Definitionen (a) und (b) sind äquivalent: ist eine Menge konvexe Hülle nach einer Definition, so ist sie auch eine konvexe Hülle nach den anderen Definitionen.
Def. (a) Die konvexe Hülle von A ist die Menge
$conv(A) := \{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k \mid \lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1 \ , \lambda_i \geq 0, x_i \in A\}.$

Def. (b) Die konvexe Hülle von A ist der Durchschnitt von allen konvexen Mengen, die A enthalten:

$$conv(A) = \bigcap_{\substack{C \supseteq A \\ C \text{ ist konvex}}} C.$$

Nach Lemma 25 ist $conv_{(b)}(A)$ konvex (als durchschnitt von konvexen Mengen), und enthält A (weil jede Mendge C die Menge A enthält). Dann liegen nach Lemma 28 alle Punkte der Form $\sum_i \lambda_i x_i$ (wobei $\lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1, \ x_i \in A$) in $conv_{(b)}(A)$.
Daraus folgt: $conv_{(a)}(A) \subseteq conv_{(b)}(A)$.
Um zu Inklusion $conv_{(a)}(A) \supseteq conv_{(b)}(A)$ zu zeigen, reicht es zu zeigen, dass $conv_{(a)}(A)$ konvex ist. (Da $A \subseteq conv_{(a)}(A)$ ist, ist dann $conv_{(a)}(A)$ eine der Mengen C aus Definition $conv_{(b)}$ und deswegen $conv_{(b)}(A) \subseteq conv_{(a)}(A)$.)

Angenommen die Punkte x und y sind konvexe Kombinationen von Punkten $x_1, ..., x_k \in A$ (OBdA können wir denken, dass die Punkte in der Linearkombination für x und y gleich sind, weil wir die fehlenden Punkte mit Koeffizient $\lambda = 0$ hinzufügen können.)

$$x = \sum_i \lambda_i x_i \quad y = \sum_i \mu_i x_i.$$

Dann besteht die Verbindungsstrecke $\overline{xy}$ aus den Punkten der Form (wobei $t \in [0,1]$) $(1-t)\sum_i \lambda_i x_i + t\sum_i \mu_i x_i = \sum_i \underbrace{((1-t)\lambda_i + t\mu_i)}_{\eta_i} x_i$.

Die Koeffizienten η_i erfüllen $\eta_i \geq 0$ und $\sum_i \eta_i = \sum_i((1-t)\lambda_i + t\mu_i) = (1-t) + t = 1$. Deswegen liegt jeder Punkt der Verbindungsstrecke $\overline{xy}$ in $conv_{(a)}(A)$, $\square$