# Plan

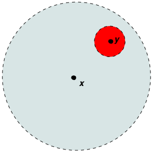
- Innere Punkten ( Lemma 29 wird später als Hilfsmittel wichtig).
- Stützende Hyperebenen und Satz über Existenz von Stützende Hyperebenen

# Topologische Begriffe in der konvexen Geometrie

**Wiederholung.** Ein offener Ball vom Radius $r > 0$ um $x_0$ ist die Menge $B_{x_0}(r) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, x_0) < r\}$.
**Def. (Analysis- Vorlesung)** Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Das Innere von $A$ (Bezeichnung: $int(A)$) ist die Vereinigung von allen offenen Bällen, die ganz in $A$ enthalten sind.

**Def. – Wiederholung.** Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist offen, falls es für jeden Punkt $a \in A$ ein $r > 0$ gibt, so dass $B_a(r) \subseteq A$.

**Bemerkung.** Eine Menge $A$ ist genau dann offen, falls $A = int(A)$.



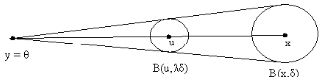

**Bsp.** Ein offener Ball ist offen. Weil für jeden Punkt $y \in B_{x_0}(r)$, also für jedes $y$ mit $|y - x_0| < r$ der ganze Ball $B_y(\frac{1}{2}(r - |y - x_0|))$ in $B_{x_0}(r)$ liegt: in der Tat, ist $z \in B_y(\frac{1}{2}(r - |y - x_0|))$, so gilt

$$|z - x_0| \overset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} |z - y| + |y - x_0|$$

$$< \frac{1}{2}(r - |y - x_0|) + |y - x_0| = \frac{1}{2}r < r.$$

**Lemma 29.** Sei $A$ eine konvexe Menge, $x \in int(A)$ und $y \in A$. Dann gilt: jeder Punkt $u \in \overline{xy}$, s.d. $u \neq y$ liegt in $int(A)$.

**Beweis.** Sei $y \in A$ und o.B.d.A. sei $y = \vec{0}$ der Ursprung. Da $x \in int(A)$, $\overset{\text{Def. von „offen"}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ eine offene Kugel $B_x(\delta) \subseteq A$. Für beliebiges $u \in \overline{xy}$, s.d. $u \neq y$ existiert ein $\lambda$, $(0 < \lambda < 1)$, so dass $u = \lambda x$. Es gilt:
$B_{\lambda x}(\lambda\delta) = \lambda B_\delta(x) := \{\lambda \cdot w \mid w \in B_\delta(x)\}$.




Weil $A$ konvex ist und $\vec{0} \in A$, gilt: $\lambda B_\delta(x) \subseteq A \Longrightarrow$
$B_{\lambda\delta}(\lambda x) = B_{\lambda\delta}(u) \subseteq A$ .
Da die Kugel um $u$ mit Radius $\lambda\delta$ in $A$ enthalten ist, folgt daraus, dass $u \in int(A)$. $\square$

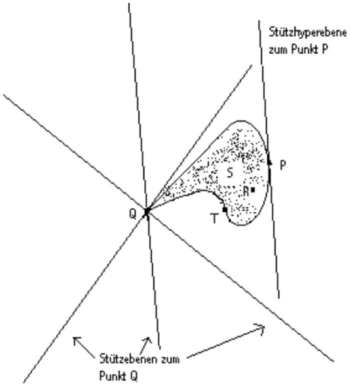
**Lemma 29.** Sei $A$ eine konvexe Menge, $x \in int(A)$ und $y \in A$. Dann gilt: jeder Punkt $u \in \overline{xy}$ s.d. $u \neq y$ liegt in $int(A)$.

**Folgerung.** Falls $A$ konvex ist, dann ist das Innere $int(A)$ konvex.

**Beweis.** Seien $x, y \in int(A)$. Nach Lemma 29 liegt jeder Punkt der Strecke $\overline{xy}$ in $int(A)$ $\square$

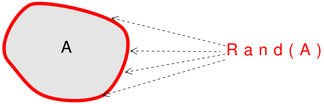
# Stützende Hyperebenen

**Def.** Eine Hyperebene $\mathcal{H}$ stützt eine Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ in einem Punkt $x \in S$, wenn $x \in \mathcal{H}$ und $\mathcal{H}$ die Menge $S$ beschränkt, d.h. $S$ liegt ganz auf einer Seite von $\mathcal{H}$ (d.h. für $\mathcal{H} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle l, y \rangle = c\rangle\}$ gilt dann $\langle l, y \rangle \geq c$ für alle $y \in S$, oder $\langle l, y \rangle \leq c$ für alle $y \in S$.) $\mathcal{H}$ heißt Stützhyperebene.




Der Punkt $Q$ besitzt mehrere Stützebenen, der Punkt $P$ genau eine, die Tangente. Die Punkte $T$ und $R$ besitzen gar keine Stützebenen.

**Def. (Analysis-Vorlesung)** Sei $S$ eine abgeschlossene Menge. Die Menge $Rand(S) := S \setminus int(S)$ heißt die Randmenge von $S$.



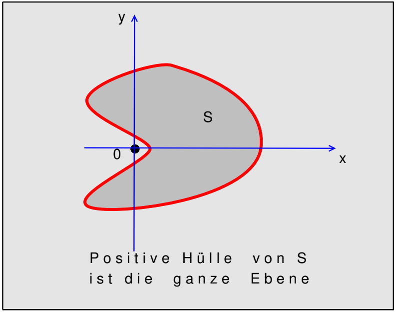

**Bsp.** Rand des abgeschlossenen Balls $\bar{B}_{x_0}(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| \leq r\}$ ist die Sphäre $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| = r\}$

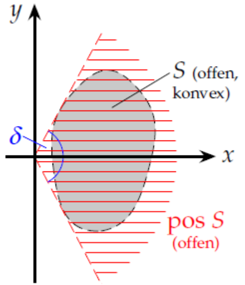
# Nächstes Ziel: Existenz einer stützenden Hyperebene durch jeden Randpunkt einer abgeschl. konvexen Menge.

**Satz. (Existenz der Stützhyperebene)** Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $S \neq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex. Es gilt: Ist $x$ ein Randpunkt von $S$, so existiert mindestens eine Hyperebene, die $S$ in $x$ stützt.

Zuerst machen wir (relativ viel) Vorarbeit.

**Def.** Der Punkt $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k$, $\lambda_i \geq 0$, $x_i \in A$, heißt positive Kombination der Elemente $x_1, \ldots, x_k$ von $A$. Die positive Hülle von $A$ $pos(A)$ ist die Menge aller positiven Kombinationen von Elementen von $A$.



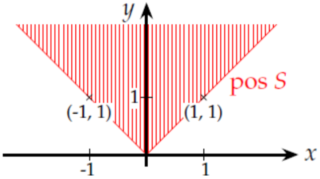




Die Menge

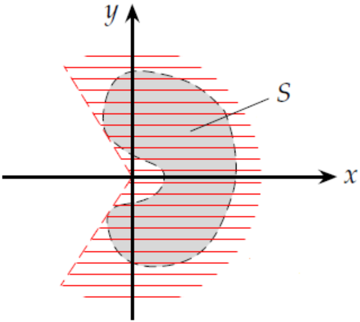
$$S := \{(-1,1),(1,1)\} \subset \mathbb{R}^2$$

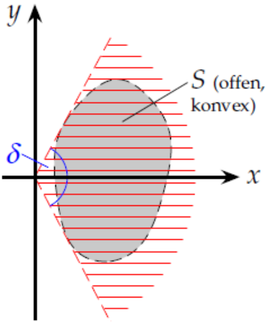
besitzt die positive Hülle

$$\text{pos}\, S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq |x|\}.$$



**Def.** Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere Menge.
Der Kegel (mit Spitze $\vec{0}$) über $S$ ist die Menge
$Kegel(S) := \{\mu \cdot x \mid \mu \geq 0, x \in S\}$.



**Lemma 30.** Es gilt:

(i) Die positive Hülle einer konvexen Menge ist konvex.

(ii) Die positive Hülle ist ein Kegel.

(iii) Ist $A$ konvex, so fällt der Kegel über $A$ mit $pos(A)$ zusammen.

**Beweis (i).** Seien $x, \bar{x} \in pos(A)$, wobei $A$ konvex ist, d.h. $x$ und $\bar{x}$ sind positive Kombinationen von Punkten aus $A$. OBdA können wir annehmen, dass die Punkte $x_i$ in der positiven Kombination für $x$ und in der positiven Kombination für $\bar{x}$ zusammenfallen; sonst können wir die fehlenden Punkte mit Koeffizient 0 hinzufügen. Dann gilt:
$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ und $\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} \bar{\lambda}_i x_i$
Dann besteht die Strecke $\overline{x\bar{x}}$ aus den Punkten (wobei $t \in [0,1]$)
$t \cdot x + (1-t) \cdot \bar{x} = t \cdot \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i + (1-t) \cdot \sum_{i=1}^{k} \bar{\lambda}_i x_i =$
$\sum_{i=1}^{k} \underbrace{(t \cdot \lambda_i + (1-t) \cdot \bar{\lambda}_i)}_{\eta_i} \cdot x_i$.

Da jedes $\eta_i$ die Summe von zwei nichtnegativen Zahlen ist, ist $\eta_i \geq 0$ und damit $t \cdot x + (1-t) \cdot \bar{x} \in pos(A)$, $\square$

**Lemma 30.** Es gilt:

(i) Die positive Hülle einer konvexen Menge ist konvex.

(ii) Die positive Hülle ist ein Kegel.

(iii) Ist $A$ konvex, so fällt der Kegel über $A$ mit $pos(A)$ zusammen.

**Beweis (ii).** Sei $x \in pos(A)$, d.h. $x$ ist eine positive Kombination von Punkten aus $A$: $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ mit $x_i \in A$ und $\lambda_i \geq 0$. Dann ist ein beliebiger Punkt $\bar{x} = \mu \cdot x$ aus $Kegel(pos(A))$ auch als positive Kombination der $x_i$ darstellbar: $\mu \cdot x = \mu \cdot \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\mu \cdot \lambda_i}_{\bar{\lambda}_i \geq 0} x_i$, □

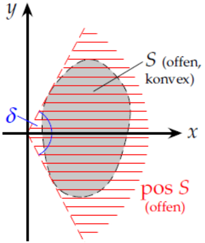
**Beweis (iii).** Die Inklusion $pos(A) \supseteq Kegel(A)$ ist offensichtlich. Wir zeigen $pos(A) \subseteq Kegel(A)$. Sei $x \in pos(A)$, wobei $A$ konvex ist. Dann ist $x = \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_k x_k$, wobei $x_i \in A$, $\mu_i \geq 0$. Sind alle $\mu_i = 0$, so ist $x = \vec{0}$, und liegt in $Kegel(A)$ nach Definition. Ist $M := \sum_i \mu_i > 0$, so betrachten wir den Punkt
$\bar{x} := \frac{1}{M} \cdot x = \underbrace{\frac{\mu_1}{M}}_{\lambda_1} x_1 + \cdots + \underbrace{\frac{\mu_k}{M}}_{\lambda_k} x_k$. Nach Konstruktion der $\lambda_i$ ist $\sum_i \lambda_i = 1$. Nach dem Äquivalenzsatz ist

$$A \overset{\text{Def (b)}}{=} conv(A) \overset{\text{Def (a)}}{=} \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k \mid \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1, \lambda_i \geq 0\}.$$

Dann liegt $\bar{x}$ in $conv(A) = A$. Damit liegt $x = M \cdot \bar{x}$ in $Kegel(A)$, □

**Lemma 31.** Sei $S \subset \mathbb{R}^2$, $S \neq \mathbb{R}^2$, offen und konvex. Dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}^2 \setminus S$: Es existiert eine Gerade $L$ mit $x \in L$ und $L \cap S = \varnothing$.

**Beweis.** OBdA sei $x := \vec{0} \in \mathbb{R}^2 \setminus S$. Da die Menge $S$ offen und konvex ist, ist nach Lemma 30 $pos(S)$ auch konvex und ein Kegel über $S$. Deswegen ist $pos(S)$ ein offener Sektor mit Eckpunkt $\vec{0}$ und Winkel $\delta \leq \pi$.




Eine Ursprungsgerade $L$ (d. h. $x = \vec{0} \in L$), die eine Seite des Sektors enthält, erfüllt nun obige Bedingung $L \cap S = \varnothing$, da der Sektor offen ist, $\square$