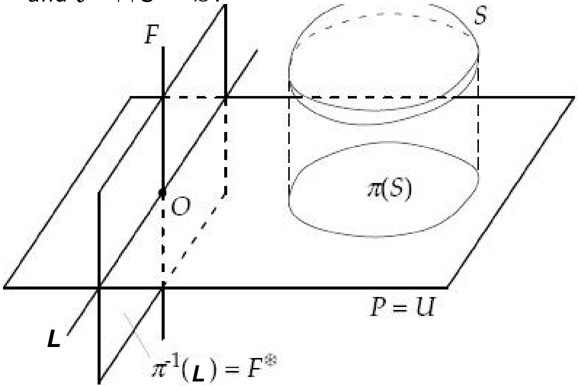
Plan

- Beweis von Satz über Existenz der Stützhyperebene
  - Wir verwenden Induktion in der Dimension. Induktionsschritt ist wesentlich in dem Hilfssatz (nächste Seite).
- Umkehrsatz.

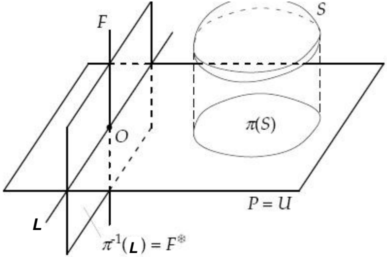
Satz. (Existenz der Stützhyperebene) Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $S \neq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex. Es gilt: Ist x ein Randpunkt von S, so existiert mindestens eine Hyperebene, die S in x stützt.

Hilfssatz. Sei $\mathcal{F}$ ein affiner Unterraum des $\mathbb{R}^n$ mit $dim(\mathcal{F}) = k$, wobei $0 \leq k \leq n-2$. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex, so daß $\mathcal{F} \cap S = \varnothing$. Dann gilt: Es existiert ein $(k+1)-$dimensionaler affiner Unterraum $\mathcal{F}^*$ mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^*$ und $\mathcal{F}^* \cap S = \varnothing$.



Beweis. Sei $e_1, ..., e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. OBdA ist $\vec{0} \in \mathcal{F}$. Sei $0 < k \leq n-2$. O.B.d.A. nehmen wir an, dass $\mathcal{F} = Span(\{e_1, ..., e_k\})$ (wobei "Span" die lineare Hülle bezeichnet)und $\mathcal{U} = Span(\{e_{k+1}, ..., e_n\})$. Sei $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathcal{U}$ die orthogonale Projektion auf $\mathcal{U}$, $\pi(a_1, ..., a_n) := (0, ..., 0, a_{k+1}, ..., a_n)$. Da π offensichtlich eine affine Abbildung ist, ist $Bild_\pi(S)$ eine konvexe Teilmenge von $\mathcal{U}$.

Wir betrachten die (2-dimensionale) Ebene $\mathcal{P} := Span(\{, e_n, e_{n-1}\})$ (auf dem Bild unten ist $\mathcal{P} = \mathcal{U}$). Die Schnittmenge $Bild_\pi(S) \cap \mathcal{P}$ ist auch eine konvexe Menge; sie ist offen als Teilmenge von $\mathcal{P}$.



Wegen $\mathcal{F} \cap S = \varnothing$ gilt: $\vec{0} \notin Bild_\pi(S)$, und deswegen $\vec{0} \notin Bild_\pi(S) \cap \mathcal{P}$. Deswegen existiert nach Lemma 31 eine Gerade $L \subseteq \mathcal{P}$ mit $x := \vec{0} \in L$ und $L \cap Bild_\pi(S) = \varnothing$.

Für $\mathcal{F}^* := Urbild_\pi L = \mathcal{F} + L$ gilt: $dim(\mathcal{F}^*) = dim(\mathcal{F}) + 1$ und $\mathcal{F}^* \cap S = \varnothing$, $\square$

Existenz von stützenden Hyperebenen: Beweis.

Satz (Existenz der Stützhyperebenen). Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $S \neq \mathbb{R}^n$, abgeschlossen und konvex. Es gilt: Ist x ein Randpunkt von S, so existiert mindestens eine Hyperebene, die S in x stützt.

Hilfssatz. Sei $\mathcal{F}$ ein affiner Unterraum von $\mathbb{R}^n$ mit $dim(\mathcal{F}) = k$, wobei $0 \leq k \leq n-2$. Sei $S \in \mathbb{R}^n$ offen und konvex, so daß $\mathcal{F} \cap S = \varnothing$.
Dann gilt: Es existiert ein $(k+1)-$dimensionaler affiner Unterraum $\mathcal{F}^*$ mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^*$ und $\mathcal{F}^* \cap S = \varnothing$.

Beweis. Angenommen, es gibt eine Hyperebene H, so dass $S \subseteq H$. Dann ist H Stützebene für jeden Punkt von S.

Im Folgenden werden wir annehmen, dass es keine Hyperebene H gibt, so dass $S \subseteq H$. Dann ist $int(S) \neq \varnothing$. In der Tat gibt es $n+1$-Punkte von S, die in keiner Hyperebene liegen. Die konvexe Hülle von diesen Punkten ist eine Teilmenge von S, welche innere Punkte besitzt.

Wir betrachten jetzt die Menge $int(S)$. Sie ist offen und nicht leer.
Für jeden Punkt $x \in Rand(S)$ liefert $((n-1)-k)$-maliges Anwenden des Hilfssatzes die Behauptung, da die Dimension des affinen Raumes jeweils um 1 wächst, bis der Raum eine Hyperebene ist, $\square$

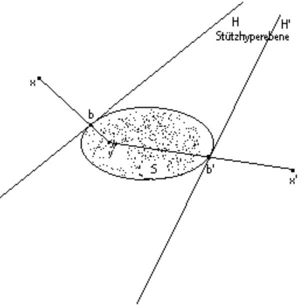
Umkehrung des Satzes über Existenz der Stützhyperebene

Satz. (Existenz der Stützhyperebene) Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $S \neq \mathbb{R}^n$,abgeschlossen und konvex. Es gilt: Ist x ein Randpunkt von S, so existiert mindestens eine Hyperebene, die S in x stützt.

Satz. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $int(S) \neq \varnothing$. Es gilt: Wenn durch jeden Randpunkt von S eine Hyperebene verläuft, die S stützt, dann ist S konvex.

Satz. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $int(S) \neq \varnothing$. Es gilt: Wenn durch jeden Randpunkt von S eine Hyperebene durchgeht, die S stützt, dann ist S konvex.

Beweis für $n \geq 2$. Sei wieder $S \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $int(S) \neq \varnothing$. Ist $S = \mathbb{R}^n$, so ist S konvex. Wir nehmen an, dass $S \neq \mathbb{R}^n$. Wir nehmen einen Punkt $x \notin S$. Außerdem gibt es, da $int(S) \neq \varnothing$, ein $y \in int(S)$ und einen Randpunkt b von S, sodass $b \in \overline{xy}$, $b \notin \{x, y\}$.



Die nach Voraussetzung existierende stützende Hyperebene $\mathcal{H}$ von S durch b enthält nicht x (denn würde sie b und x enthalten, so enthielte sie auch die Strecke $\overline{bx}$ und damit auch die Strecke $\overline{xy}$, was im Widerspruch dazu steht, dass y ein innerer Punkt ist). Folglich gilt für den abgeschlossenen Halbraum, der von $\mathcal{H}$ begrenzt wird und y enthält, dass er S einschließt, aber nicht x enthält.

Da x ein beliebiger Punkt ist der nicht in S liegt, kann man dieses Verfahren für alle $x \notin S$ anwenden und so schließen, dass S gleich dem Schnitt aller so entstandenen Halbräume, welche S enthalten, ist. Also ist S ein Durchschnitt von konvexen Mengen und damit selbst konvex, $\square$

Sätze über Existenz der Stützhyperebene und dessen Umkehrung in Worten

Die Sätze ergeben die folgende Charakterisierung von abgeschlossenen konvexen Mengen mit nicht leerem Inneren:

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $int(S) \neq \varnothing$. Dann gilt:

S ist genau dann konvex, wenn durch jeden Randpunkt von S eine die Menge S stützende Hyperebene geht.

$\Longrightarrow$ Gilt nach Satz über Existenz der Stützhyperebene.

$\Longleftarrow$ Gilt nach Umkehrung des Satzes.

Bemerkung. Das Interessante an diesem wichtigen Satz ist, dass er die globale paarweise Definition von Konvexität (Die Strecke zwischen zwei beliebigen Punkten aus S muss ganz in S liegen) mit einer Eigenschaft von einigen einzelnen Punkten (jeder Randpunkt muss in einer Stützebene liegen) gleichsetzt.