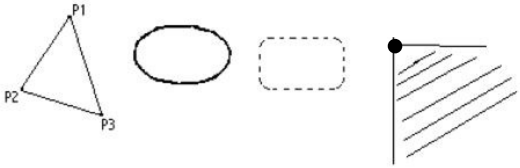
Plan dieser Vorlesung.

- Wir arbeiten weiter mit konvexen Mengen und benutzen die bewiesen Ergebnisse der letzten Vorlesung (z.B. den Satz über Stützhyperebenen)
- Wir definieren Extrempunkte und Profil einer konvexen Menge
- Wir beweisen den Satz über der Darstellung von konvexen Körper als Konvexe Hülle des Profils. Sie werden mehrere Ähnlichkeiten mit der Theorie von Basen in Vektorräumen sehen

Def. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge. Ein Punkt $x \in S$ heißt Extrempunkt von S, wenn es kein Intervall $\overline{ab}$ ganz in S liegend gibt, $\overline{ab} \subseteq S$, sodass $x \in \overline{ab}$ und $x \notin \{a, b\}$. Die Menge aller Extrempunkte von S heißt Profil von S.



Das Profil eines Dreiecks sind seine drei Eckpunkte, das Profil einer Ellipse ist der ganze Rand. Offene Mengen haben kein Profil, genauso wenig der ganze Raum und Halbräume. Viertelräume hingegen haben einen Eckpunkt als Profil.

Wiederholung – Vorl. Analysis. Eine abgeschlossene beschränkte Menge im $\mathbb{R}^n$ ist kompakt.

Satz (Darstellung von konvexen Körper als Konvexe Hülle des Profils). Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte und konvexe Menge. Es gilt: S ist die konvexe Hülle ihres Profils P.

In anderen Worten, Jedes $x \in S$ ist Konvex-Kombination von Elementen des Profils von S.

Beweis.

Zuerst eine Hilfsaussage:

Lemma 32 Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex. Sei $\mathcal{H}$ eine Stützhyperebene von S in einem Punkt $x \in S$. Es gilt: Ist x ein Extrempunkt von $\mathcal{H} \cap S$, so ist x ein Extrempunkt von S.

Beweis. Sei $\mathcal{H} := \{y \mid \langle l, y \rangle = c\}$. Sei x aus dem von $S \cap \mathcal{H}$. Dann gilt $\langle l, x \rangle = c$. OBdA ist $\langle l, z \rangle \leq c$ für alle $z \in S$. Wir nehmen an, dass x nicht aus dem Profil von S ist.

Das heißt, x liegt im Inneren eines Intervals, also $x = \lambda \cdot u + (1 - \lambda) \cdot v$ mit $\lambda \in (0, 1)$,$u, v \in S$ und entweder $u \notin S \cap \mathcal{H}$ oder $v \neq S \cap \mathcal{H}$ (sonst wäre x kein Extrempunkt in $S \cap \mathcal{H}$.) Folglich gilt $\langle l, u \rangle < c$ oder $\langle l, u \rangle > c$.

OBdA können wir annehemen, dass $\langle l, u \rangle < c$.
Dann gilt $c = \langle l, x \rangle = \langle l, \lambda \cdot u + (1 - \lambda) \cdot v \rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \lambda \cdot \langle l, u \rangle + (1 - \lambda) \cdot \langle l, v \rangle < \lambda \cdot c + (1 - \lambda) \cdot c = c$.

Der Widerspruch zeigt, dass x im Profil von S liegt, $\square$

Satz. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte und konvexe Menge. Es gilt: S ist die konvexe Hülle ihres Profils P.

Induktionsbeweis nach $k := dim(aff(S))$.

InduktionsAnfang: Ist $k = 0$, so ist S nur ein Punkt. Da dieser Punkt trivialerweise auch das Profil P von S ist, gilt $conv(P) = S$.

InduktionsVoraussetzung: Gelte der Satz für jede kompakte, konvexe Menge der Dimension höchstens $k - 1$.

Satz. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte und konvexe Menge. Es gilt: S ist die konvexe Hülle ihres Profils P.

Induktionsschritt: Sei $dim(aff(S)) = k$ und $x \in S$. Die affine Hülle $aff(S)$ (auf der nächsten Seite wiederhole ich den Begriff "affine Hülle") ist zu $\mathbb{R}^k$ isomorph. Offensichtlich ist S kompakt und konvex als Teilmenge von $aff(S) \cong \mathbb{R}^k$. Ferner gilt: Das Profil P von S (in $\mathbb{R}^n$) und die konvexe Hülle $conv(P)$ (auch in $\mathbb{R}^n$) fällt mit dem Profil P von S (in $aff(S) \cong \mathbb{R}^k$) und der konvexen Hülle $conv(P)$ (auch in $aff(S) \cong \mathbb{R}^k$) zusammen. Also können wir OBdA annehmen, dass $k = n$ ist.

Ist x im Rand von S enthalten, so gibt es nach dem Satz über Existenz der Stützhyperebene eine $k-1$ dimensionale Hyperebene, die S in x stützt. Die Menge $S \cap \mathcal{H}$ ist kompakt und konvex, wobei $dim(aff(S \cap \mathcal{H})) \leq k-1$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann, dass x eine Konvexkombination der Extrempunkte von $S \cap \mathcal{H}$ ist. Aus Lemma 32 folgt, dass x eine Konvexkombination der Extrempunkte von S ist. Wir haben deswegen $Rand(S) \subseteq conv(P)$ bewiesen.

Wir zeigen jetzt $int(S) \subseteq conv(P)$. Sei $x \in int(S)$. Sei $\mathcal{G}$ eine Gerade in der affinen Hülle von S durch x. Dann ist $\mathcal{G} \cap S$ ein Interval mit Endpunkten y und z, wobei $y, z \in Rand(S) \subseteq conv(P)$. Dann liegt das ganze Intervall in $conv(P)$, folglich $int(S) \subseteq conv(P)$.
Insgesamt haben wir gezeigt:$S \subseteq conv(P)$.Da S konvex ist, ist $conv(P) \subseteq S$ nach dem Äquivalenzsatz. Also erhalten wir $conv(P) = S$. $\square$

Affine Hülle

Begriff "Affine Hülle" kann/soll aus der Vorlesung Lineare Algebra II (Lehramt Gymnasium) bekannt sein. Die formale Definition ist die standarte "Hüllendefinition": zuerst beweist man, dass nichtleerer Durschnitt von affinen Räumen wieder ein affiner Raum ist. Danach definiert man die affine Hülle $\mathit{Aff}(P)$ als Durschnitt von allen affinen Unterraumen, welche P enthalten.

Eine einfachere Definition ist möglich, wenn $\vec{0} \in P$ (was wir o.B.d.A. annehmen können). In diesem Fall, ist

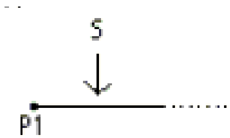
$$\mathit{Aff}(P) = \mathit{Span}(P),$$

und dass kann man vorübergehend als Definition nehmen.

Folgerung. Jede kompakte, konvexe Menge S besitzt mindestens einen Extrempunkt.

Beweis. Weil S nach Satz über Darstellung der konvexen Körper als Konvexhülle des Profils mit der konvexe Hülle der Extrempunkte übereinstimmt, $\square$

Beispiele, die zeigen, dass die Annahmen wichtig sind:



Links: S ist eine Halbgerade, d.h. S ist konvex aber unbegrenzt und somit nicht kompakt. Das Profil von S ist der Punkt P_1. Es gilt hier: $conv(P) \neq S$.

Rechts: S ist ein halboffener, halbgeschlossener Kreis, d.h. S ist konvex und beschränkt, aber nicht abgeschlossen, also nicht kompakt. Das Profil von S ist der linke Halbkreis. Folglich gilt $conv(P) \neq S$.

Es gibt Ähnlichkeiten zwischen dem Profil einer kompakten, konvexen Menge und einer Basis eines linearen Untervektorraums bzw. Koordinatensystems eines affinen Unterraums:

- Eine Basis B eines linearen Unterraums U ist eine linear unabhängige Teilmenge von U, welche den Unterraum aufspannt, in dem Sinn, dass jedes Element von U eine Linearkombination der Elemente in B ist. Jeder Unterraum des $\mathbb{R}^n$ besitzt eine Basis, und obwohl die Basis nicht eindeutig ist, hat sie immer die gleiche Anzahl von Elementen.

- Eine Teilmenge F des $\mathbb{R}^n$ besitzt eine affin unabhängige Teilmenge A von F mit einer endlichen Anzahl von Elementen, so dass die affine Hülle von A gleich der affinen Hülle von F ist. Obwohl diese Teilmenge nicht eindeutig ist, hat sie immer die gleiche Anzahl von Elementen.

- Wenn wir eine Menge als konvex unabhängig definieren, wenn kein Element der Menge eine Konvexkombination der anderen Elemente ist, dann ist das Profil P von S eine konvex unabhängige Teilmenge von S, wobei S wieder kompakt und konvex ist, so dass die konvexe Hülle von P gleich S ist. In der Analogie gesprochen heißt das, dass P die Menge S konvex aufspannt. Obwohl das Profil eindeutig ist, kann es unglücklicherweise unendlich viele Elemente haben.

Wie die Beispiele auf der vorherigen Seite zeigen, bricht diese Analogie leider völlig zusammen, falls die Menge S nicht kompakt ist.