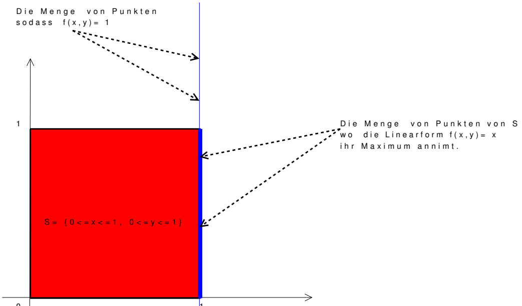
Plan

- Warum heissen Extrempunkte Extrempunkte? (Antwort: **Satz über Extrempunkte.**)
- Konvexe Polytopen
- Kompaktheit von konvexen Polytopen
- Minimaldarstellung eines konvexen Polytops.

Satz über Extrempunkte. Sei f eine lineare Form auf $\mathbb{R}^n$, sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex. Es gilt: Es existieren Extrempunkte $\bar{x}$ und $\bar{y} \in S$, so dass $f(\bar{x}) = \max_{x \in S} f(x)$ und $f(\bar{y}) = \min_{x \in S} f(x)$.

Bemerkung. Eine Linearform ist offensichtlich eine stetige Abbildung. Dann nimmt sie (Analysis-Vorlesung) auf kompakten Mengen ihr Minimum (z.B im Punkt $\bar{y}$) und Maximum (z.B im Punkt $\bar{x}$) an. Also müssen wir nur zeigen, dass wir die Punkte $\bar{x}$ und $\bar{y}$ so wählen können, dass sie Extrempunkte sind.

Bemerkung. Nach dem Satz über Extrempunkte nimmt eine Linearform ihr Maximum und Minimum auf einer kompakten konvexen Menge in einem Extrempunkt der Menge an. Aber eventuell nicht nur: **Bsp.**



Satz über Extrempunkte. Sei f eine lineare Form auf $\mathbb{R}^n$, sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex. Es gilt: Es existieren Extrempunkte $\bar{x}$ und $\bar{y} \in S$, so dass $f(\bar{x}) = \max_{x \in S} f(x)$ und $f(\bar{y}) = \min_{x \in S} f(x)$.

Beweis. Sei $\gamma := \max_{x \in S} f(x)$. Weil S kompakt ist und f stetig, gibt es einen Punkt $\bar{x}$ sodass $f(\bar{x}) = \gamma$.

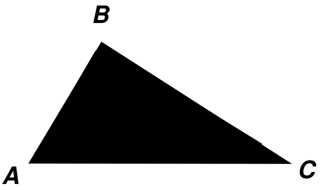
Wir haben in dem letzten Satz bewiesen, dass $conv(P) = S$; deswegen gibt es Extrempunkte $x_1, ..., x_k \in P \subseteq S$ und nicht negative $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, so dass $\bar{x} = \sum_i \lambda_i x_i$.
Dann ist $f(\bar{x}) = f(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_k x_k) = \lambda_1 \underbrace{f(x_1)}_{\leq \gamma} + ... + \lambda_k \underbrace{f(x_k)}_{\leq \gamma} \leq \gamma$ und $= \gamma$, nur wenn für alle i gilt, dass $\lambda_i f(x_i) = \lambda_i \gamma$. Da eines der λ nicht 0 ist, impliziert dies, dass für ein i gilt $f(x_i) = \gamma$, also nimmt die Linearform den maximalen Wert im Extrempunkt x_i an, $\square$

Konvexe Polytope

Def. Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt (konvexes) Polytop, falls $P = \{x_1, x_2, ..., x_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert, so daß $S = conv(P)$.

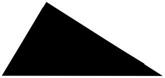
2-dimensionale Polytope heißen auch Polygone.
3-dimensionale Polytope heißen auch Polyeder.

Bsp. Ein (volles) Dreieck ist ein 2-dimensionales Polytop (Polygon); da wir in der letzten Vorlesung bewiesen haben, dass ein Dreieck die konvexe Hülle seiner Ecken $\{A, B, C\}$ ist.

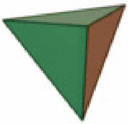


Bsp. Die konvexe Hülle von affin unabhängigen Punkten $\{a_0, a_1, ..., a_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ (in diesem Fall ist $k \leq n$) heißt ein Simplex und ist ein Polytop.

1-dimensionales Symplex
-- die Strecke



2-dimensionales Symplex
-- das Dreieck



3-dimensionales Symplex
-- das Tetraeder

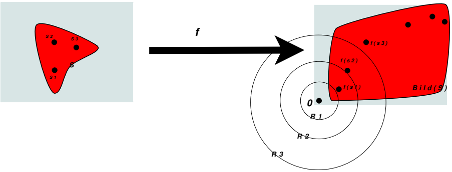
Bemerkung. Ein konvexes Polytop ist kompakt
(d.h., (i) abgeschlossen und (ii) beschränkt.)

Beweis der Bemerkung wird nicht vorgetragen, aus der Zeitgründen, und weil die Aussage anschaulich klar ist. Vollständigkeitshalber lasse ich den Beweis in Folien stehen.

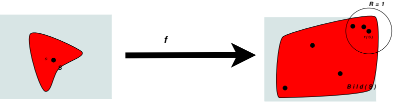
Beweis. Wir benutzen die folgende Eigenschaft von kompakten Mengen:
Hilfsaussage: Für eine beliebige kompakte Menge $S \subseteq \mathbb{R}^k$ und für eine beliebige stetige Abbildung $f : S \to \mathbb{R}^n$ gilt: Das Bild $Bild_f(S)$ ist kompakt.
Diese Eigenschaft wurde in der Vorlesung Analysis bewiesen. Ich wiederhole den Beweis: S sei kompakt, $f : S \to \mathbb{R}^n$ sei stetig; wir zeigen, dass $Bild_f(S)$ kompakt ist.

Wir zeigen zuerst, dass $Bild_f(S)$ beschränkt ist. Angenommen, das ist nicht der Fall (Widerspruchsbeweis), dann gibt es für jeden Radius $R \in \mathbb{R}$ ein $s \in S$ mit $|f(s)| > R$.

Wir betrachten die Folge von Radien $R_k := k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ und die entsprechenden Punkte s_k, so dass $|f(s_k)| > R_k = k$ gilt. Da S kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $s_{k_i} \stackrel{i\to\infty}{\longrightarrow} s$, $i = 1, 2, \ldots$.



Wegen der Stetigkeit von f gilt: $f(s_{k_i}) \stackrel{i\to\infty}{\longrightarrow} f(s)$. Das bedeutet, dass für jedes ε, z.B. für $\varepsilon = 1$ gilt: für ein $I \in \mathbb{N}$ und für jedes $i \geq I$ gilt $|f(s_{k_i}) - f(s)| < 1$.



Dann gilt: von einer Seite, $|f(s_{k_i})| \leq max(|f(s_{k_1})|, \ldots, |f(s_{k_I})|, |f(s)| + 1)$,

weil die Längen der ersten I Elementen $f(s_{k_i})$ kleiner gleich entsprechenden $|f(s_{k_i})|$ sind, und die Längen der Elementen $f(s_{k_i})$ mit $i > I$ sind kleiner gleich $|f(s)| + 1$ nach Dreiecksungleichung sind:$|f(s_{k_i}) - f(s)| \leq 1 \Longrightarrow$

$|f(s) + f(s_{k_i}) - f(s)| \stackrel{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} |f(s)| + 1$. Von der anderen Seite, ist $|f(s_{k_i})| \geq k_i \stackrel{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Widerspruch zeigt, dass $Bild_f(S)$ beschränkt ist.

Wir beweisen weiter die Hilfsaussage (Eigenschaft von kompakten Mengen):
für eine beliebige kompakte Menge $S \subseteq \mathbb{R}^k$ und für eine beliebige stetige Abbildung $f : S \to \mathbb{R}^n$ gilt: Das Bild $Bild_f(S)$ ist kompakt.
Wie beweisen jetzt, dass $Bild_f(S)$ abgeschlossen ist.

Sei $f(s_k) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} a$ eine beliebige konvergente Folge von Elementen aus $Bild_f(S)$. Wir müssen zeigen, dass $a = f(s)$ für ein $s \in S$ ist.
Wir betrachten dafür die Folge s_k. Da S kompakt ist, hat sie eine konvergente Teilfolge $s_{k_i} \stackrel{i\to\infty}{\longrightarrow} s$. Wir betrachten $f(s) \in Bild_f(S)$. Da f stetig ist, gilt $f(s_{k_i}) \stackrel{i\to\infty}{\longrightarrow} f(s)$. Von anderen Seite, ist $f(s_{k_i})$ eine Teilfolge der konvergenten Teilfolge $f(s_k)$, und konvergiert deswegen gegen Grenzwert von $f(s_k)$, also gegen a. Dann ist $f(s) = a$, $\square$

Wir beweisen die Bemerkung: Ein konvexes Polytop ist kompakt

Sei $P = conv(x_0, ..., x_k)$. Wir betrachten die Menge

$$S^k := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k \mid \ \lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i \leq 1 \right\}. S^k \text{ ist ein Simplex mit Ecken } \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{0}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1}, ..., \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_k}.$$

In der Tat, die konvexe Kombination von Punkten $\vec{0}, e_1, ..., e_k$ mit Koeffizienten $\lambda_0, ..., \lambda_k$ ist genau $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$; da $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$, ist $\sum_{i=1}^k \lambda_i \leq 1$ und umgekehrt: ist $\sum_{i=1}^k \lambda_i \leq 1$, so können wir ein $\lambda_0 \geq 0$ so finden, dass $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$, nämlich $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^k \lambda_i$.

Das Simplex S^k ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt.

Die Abbildung $f : S^k \to \mathbb{R}^n$,

$f(\lambda_1, ..., \lambda_k) = \left(1 - \sum_{i=1}^k \lambda_i\right) x_0 + \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n$ ist offensichtlich stetig. Dann bildet sie kompakte Mengen auf kompakte Mengen ab nach der gerade bewiesenen Hilfsaussage. Da $Bild_f(S^k) = conv(x_0, ..., x_k)$, ist $conv(x_0, ..., x_k)$ kompakt.