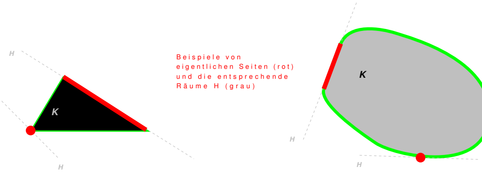
Def. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und abgeschlossen. Sei $F \subseteq K$, und sei $k \in \{0, 1, ..., dim(aff(K))\}$. F heißt $k-$Seite von K, falls $dim(aff(F)) = k$ und eine Stützhyperebene $\mathcal{H}$ an K existiert, so daß $F = K \cap \mathcal{H}$.

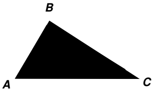


Konvention Wir betrachten K als eine $n-$Seite von K, diese Konvention wird später die Euler-Formel verbessern. Man nimmt oft an, dass $\varnothing$ auch eine Seite von K ist (obwohl dies nach Definition falsch ist – stützende Hyperebenen haben immer nichtleeren Durchschnitt mit der Menge,) wir haben es nicht nötig

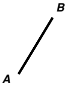
Def. – Fortsetzung. K (und $\varnothing$, falls wir $\varnothing$ künstlich als eine Seite definieren) heißen uneigentliche Seiten von K, alle übrigen heißen eigentliche Seiten von K. Jede $dim(K) - 1$ dimensionale Seite von K heißt Facette, jede $1-$Seite von K Kante und jede $0-$Seite Ecke.

Wir wissen bereits, daß jede kompakte konvexe Menge durch ihr Profil erzeugt wird. Im Folgenden werden wir sehen, daß das Profil eines Polytopes gleich der Menge der Ecken ist. Desweiteren ist diese Menge die im Sinne der folgenden Definition eindeutig bestimmte minimale Darstellung des Polytopes P.

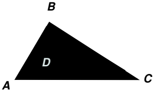
Def. Die Menge $S := \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ ist eine minimale Darstellung des Polytopes P, wenn $P = conv(\{x_1, x_2, ..., x_k\})$ und $\forall i \in \{1, 2, ..., k\}$ gilt: $x_i \notin conv(S \setminus \{x_i\})$.



Die Eckenmenge {A, B, C} ist die minimale Darstellung des Dreiecks: wenn wir ein Element, z.B. C, rausnehmen, bekommen wir eine kleinere Menge als die konvexe Hülle



Dreieck (A,B,C) ist aber auch eine konvexe Hülle der Menge {A, B, C, D}, siehe Bild rechts. Die minimale Darstellung ist immer noch die Menge {A, B, C}: wenn wir ein Element aus {A,B,C} rausnehmen, bekommen wir eine kleinere Menge als die konvexe Hülle. Wenn wir D rausnehmen, wird die konvexe Hülle nicht verkleinert.



Bemerkung. Jedes Polytop $P = conv(S)$ mit $S = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ besitzt eine minimale Darstellung. Falls nämlich $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ nicht minimal ist, existiert $x_i \in S$ mit $x_i \in conv(\{x_j \in S \mid j \neq i\})$. Es folgt $P = conv(\{x_j \in S \mid j \neq i\})$.

Auf diese Weise kann man stets eine echt kleinere Erzeugermenge des Polytops finden, bis die Erzeugermenge minimal ist.

Satz (Minimaldarstellung eines Polytops). Sei $M := \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ eine minimale Darstellung des Polytopes P. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $x \in M$.

(ii) x ist Ecke von P.

Satz (Minimaldarstellung eines Polytops). Sei $M := \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ eine minimale Darstellung des Polytopes P. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

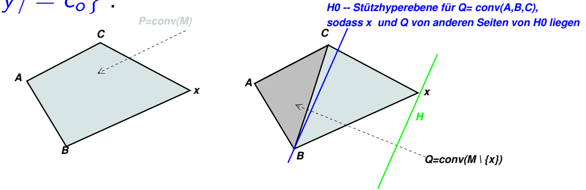
(i) $x \in M$.

(ii) x ist Ecke von P.

Beweis. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Sei $x \in M = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Man betrachte $conv(M \setminus \{x\})$. Da M minimal ist und $x \in M$ folgt $x \notin conv(M \setminus \{x\}) =: Q$.

Man beachte, dass Q ein Polytop ist und deswegen Q kompakt ist. Dann, wie wir es in der Umkehrung des Satzes über die Existenz der Stützhyperebene bewiesen haben, existiert eine Stützhyperebene $\mathcal{H}_0$ für Q, s.d. $x \notin H$ und x und Q auf verschiedenen Seiten von $\mathcal{H}_0$ liegen. Sei $\mathcal{H}_0 = \{y \mid \langle l, y \rangle = c_o\}$.

M={A,B,C,x}



OBdA sei $\langle l, q \rangle \geq c_o$ für alle $q \in Q$, und $\langle l, x \rangle < c_o$. Sei $c = \langle l, x \rangle$. Wie betrachten die Hyperebene $\mathcal{H} := \{y \mid \langle l, y \rangle = c\}$: sie ist parallel zu $\mathcal{H}_0$ und enthält den Punkt x.

Wir zeigen, dass $\mathcal{H} = \{y \mid \langle l, y\rangle = c\}$ wie in der Definition einer Ecke ist, d.h. $\mathcal{H}$ ist eine Stützhyperebene an P im Punkt x, und $P \cap \mathcal{H} = \{x\}$. Wir benutzen, dass für alle $q \in Q := conv(M \setminus \{x\})$:

$$\langle l, q\rangle \geq c_o > \langle l, x\rangle \quad (:= c) \qquad (**)$$

Für jedes $y \in P$, $y \neq x$ gilt:

$$y = \lambda x + \sum_i \lambda_i x_i \quad \text{mit} \quad 0 \leq \lambda < 1,\ \lambda + \sum_i \lambda_i = 1,\ x_i \in Q.$$

Dann gilt (wir bilden das Skalarprodukt mit l)

$$\langle l, y\rangle = \lambda\langle l, x\rangle + \sum_i \lambda_i \langle l, x_i\rangle \quad \text{mit} \quad 0 \leq \lambda < 1,\ \lambda + \sum_i \lambda_i = 1,\ x_i \in Q.$$

Wegen $0 \leq \lambda < 1$ und $\lambda + \sum_i \lambda_i = 1$ existiert ein $i \in \{1, 2, ..., n\}$ mit $\lambda_i \neq 0$. Es folgt mit $(**)$:

$$\langle l, y\rangle > \lambda\langle l, x\rangle + \sum_i \lambda_i \langle l, x\rangle = \langle l, x\rangle.$$

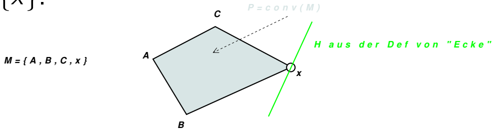
Wir sehen, dass alle $y \in P$ auf einer Seite von $\mathcal{H}$ liegen, und $P \cap \mathcal{H} = \{x\}$. Der Punkt x ist also eine Ecke von P.

(ii) $\Longrightarrow$ (i):

(ii) x ist Ecke von P.

(i) $x \in M$ (M ist Minimaldarstellung von P).

Sei x eine Ecke von $P = conv(M)$, und $\mathcal{H}$ die Hyperebene aus der Definition einer Ecke, d.h. $\mathcal{H} := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, l \rangle = c\}$ ist eine Stützhyperebene an P im Punkt x (oBdA ist $\langle p, l \rangle \leq c$ für alle $p \in P$), und $P \cap \mathcal{H} = \{x\}$.



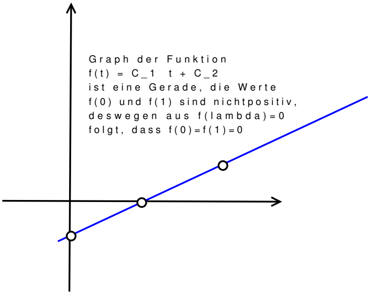
Wir betrachten $P \setminus \{x\}$. Das ist eine konvexe Menge: in der Tat, angenommen, $p_0, p_1 \in P \setminus \{x\}$ und $\overline{p_0 p_1} \not\subseteq P \setminus \{x\}$. Da P konvex ist, ist $\overline{p_0 p_1} \subseteq P$; also muss x ein Punkt von $\overline{p_0 p_1}$ sein. Da nach Voraussetzung $p_0, p_1 \in P \setminus \{x\}$, ist $x \neq p_0$, $x \neq p_1$, also gibt es ein $\lambda \in (0,1)$ mit $x = (1-\lambda)p_0 + \lambda p_1$. Wir betrachten die Funktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(t) := \langle tp_1 + (1-t)p_0, l \rangle - c = t \cdot \langle p_1, l \rangle + (1-t)\langle p_0, l \rangle - c,$$

$$:= t \cdot \underbrace{\langle p_1 - p_0, l \rangle}_{C_1 \in \mathbb{R}} + \underbrace{\langle p_1, l \rangle - c}_{C_2 \in \mathbb{R}}$$

Die Funktion $f(t) := t \cdot \underbrace{\langle p_1 - p_0, l \rangle}_{C_1 \in \mathbb{R}} + \underbrace{\langle p_0, l \rangle - c}_{C_2 \in \mathbb{R}}$ hat die folgenden

Eigenschaften



- $f(\lambda) = 0$, da x auf $\mathcal{H}$ liegt.
- $f(0) \leq 0, f(1) \leq 0$, da $p_0, p_1 \in P$ sind,
- $f(t) = C_1 t + C_2$

Dann muss $f(p_1) = f(p_0) = 0$, schliesslich liegen die Punkte p_1 und p_0 auf $\mathcal{H}$, was den Voraussetzungen widerspricht, $\square$

Satz (Minimaldarstellung eines Polytops). Sei $M := \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ eine minimale Darstellung des Polytopes P. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $x \in M$.

(ii) x ist Ecke von P.

Folgerung. Jeder Extrempunkt des Polytops ist eine Ecke.

Beweis. x sei ein Extrempunkt von $P = conv(x_1, ..., x_k)$. Sei $M \subseteq \{x_1, ..., x_k\}$ eine Minimaldarstellung von P. Z.z.: $x \in M$.
Wir zeigen zuerst: $P \setminus \{x\}$ konvex. Angenommen, das ist nicht der Fall (Widerspruchsbeweis), also gibt es $p_1, p_2 \in P \setminus \{x\}$, so dass die Strecke $\overline{p_1 p_2}$ nicht vollständig in $P \setminus \{x\}$ liegt. Da die Strecke $\overline{p_1 p_2} \subseteq P$, liegt $x \in \overline{p_1 p_2}$. Da $p_1, p_2 \in P \setminus \{x\}$, ist $p_1, p_2 \neq x$, also $x \in \overline{p_1 p_2}$, $x \notin \{p_1, p_2\}$. was Definition von Extrempunkt widerspricht. Der Widerspruch beweist, dass $P \setminus \{x\}$ konvex ist.

Wir können jetzt $x \in M$ zeigen. Wäre $x \notin M$, folgte $M \subseteq P \setminus \{x\}$, deswegen $P = conv(M) \subseteq P \setminus \{x\}$, was sicher falsch ist. Der Widerspruch zeigt, dass $x \in M$, $\square$