Plan

- Eulersche Polyedersatz
- Satz über platonische Körper.

Der Eulersche Polyedersatz

Def Die Anzahl der $k-$Seiten eines konvexen Polytops P bezeichnen wir mit $f_k(P)$ oder kurz mit f_k. Das $n-$Tupel $(f_0, f_1, ..., f_{n-1}) \in \mathbb{Z}^n$ heißt dann der $f-$Vektor des ($n-$dimensionalen) Polytops P .

Beispiel für einen f-Vektor: Wenn P ein $n-$Simplex ist, also eine konvexe Hülle von $n+1$ affin unabhängigen Punkten, dann entsprechen die $k-$Seiten von P genau den $(k+1)-$elementigen Teilmengen der Eckenmenge von P, daher ist $f_k(P) = \binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$. Zum Beispiel sieht der $f-$Vektor eines $5-$Simplex also so aus: (6, 15, 20, 15, 6).

Die naheliegende Frage, welche $d-$Tupel natürlicher Zahlen als $f-$Vektoren konvexer Polytope auftreten, ist sehr schwierig und bis heute (zumindest in dieser allgemeinen Form) ungelöst. Im Folgenden wird eine notwendige Bedingung besprochen, welche die $f-$Vektoren konvexer Polytope erfüllen müssen, nämlich der Eulersche Polyedersatz.

Eulerscher Polyedersatz für beliebige Dimension

Satz (Beweis nur in Dim. 3) (Eulerscher Polyedersatz) Sei $(f_0, f_1, ..., f_{n-1})$ der $f-$Vektor eines $n-$Polytops. Dann gilt:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f_k = 1 - (-1)^n.$$

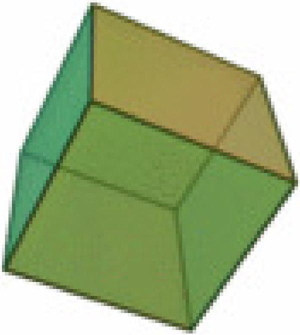
Setzt man $f_n := 1$, so kann man diese Formel auch so schreiben:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f_k = 1.$$

Beweis vom Satz in dim n können Sie, (wenn sie wollen – nicht prüfungsrelevant) im Skript "Geometrie" von Johann Linhart
`https://www.plus.ac.at/mathematik/fachbereich/team/linhart-johann/`
finden.

Wir werden den Satz nur für $n = 3$ beweisen: in diesem Fall lautet der Satz: $f_0 - f_1 + f_2 = 2$, oder in traditionelle Form geschrieben:

$$\underbrace{E}_{\#\text{Ecken}} - \underbrace{K}_{\#\text{Kanten}} + \underbrace{F}_{\#\text{Facetten}} = 2.$$



Beispiel: Würfel

Am einfachen Beispiel des Würfels sieht man, dass es Polyeder gibt, bei denen in jeder Ecke gleich viele Kanten zusammenlaufen (nämlich 3), und jede Fläche von gleich vielen Kanten berandet wird (nämlich 4). Es gilt also für jeden Würfel: $E = 8$ $F = 6$ $K = 12$ Wir sehen hier auch, dass die Polyederformel gilt: 8 + 6 - 12 = 2.

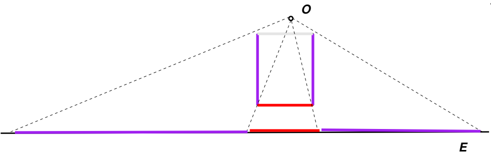
Satz (Eulerscher Polyedersatz für Dimension 3) Sei $P = conv(x_1, ..., x_k)$ ein 3-dimensionales Polytop, d.h., $dim(Aff(x_1, ..., x_k)) = 3$. Dann gilt:

$$\underbrace{E}_{\#\text{Ecken}} - \underbrace{K}_{\#\text{Kanten}} + \underbrace{F}_{\#\text{Facetten}} = 2.$$

Bemerkung. 19 verschiedene Beweise von dem Satz kann man auf http://www.ics.uci.edu/∼eppstein/junkyard/euler/ finden.

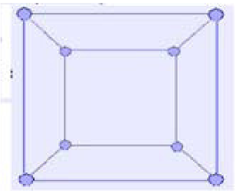
Beweis

Wir vereinfachen die Situation, indem wir das Polyeder in die Ebene projezieren. Dazu benutzen wir die Zentralprojektion: wir plazieren den Punkt O und die Ebene $\mathcal{E}$ wie auf dem niedrig-dimensionalen Bild:



Wichtig ist, dass der Punkt O außerhalb des Polytops nah genug zu einem inneren Punkt (z.B. Schwerpunkt) einer ausgewählten (Grau auf dem Bild) Facette liegt.

Dabei wird diese ausgewählte Facette entfernt und das entstehende Gebilde flach in die Ebene ausgebreitet. Wenn der Punkt O nah genug zum Polytop ist, werden alle anderen Facetten bijektiv auf die Ebene abgebildet. Das Bild jeder Facette ist ein Polygon (2-dimensionales Polytop). Die Anzahl der Ecken, Kanten und Facetten bleibt gleich, weil die “entfernte” Facette der äußeren, quasi “unendlichen” Fläche zugeordnet wird. Das Bild dieser Projektion wird Polyedernetz genannt. Hier eine Skizze für den Würfel:



Wir können nun den Polyedersatz von Euler mit Induktion über die Anzahl der Kanten K beweisen:

Induktionsanfang: $K = 1$ Es gibt nur 2 verschiedene Netze die dies erfüllen (auch wenn wir krumme Kanten zulassen, was bei uns nicht der Fall ist:)

Für beide gilt die Beziehung. Im ersten Fall ist $E = 2$, $F = 1$ und $K = 1$. Im zweiten Fall ist $E = 1$, $F = 2$ und $K = 1$.

Induktionsschritt von K auf $K + 1$: Sei a ein Netz mit $K + 1$ Kanten, E' Ecken und F' Flächen. zu zeigen ist also: $E + F = K + 2$.

Wir unterscheiden 3 Fälle.

1. Fall: Die „neue" Kante ist eine sogenannte „Schlinge" (wie im zweiten Fall bei der Skizze oben), das heisst die Anzahl der Flächen erhöht sich um eins ($F' = F + 1$) und die Anzahl der Ecken bleibt gleich. ($E' = E$). Dann gilt:

$E' + F' = E + (F + 1) \stackrel{?}{=} (K + 1) + 2 \Longleftrightarrow E + F = K + 2$ gilt nach Induktionsvoraussetzung.

2. Fall: Die neue Kante verbindet zwei vorhandene Ecken, dadurch wird eine vorhandene Fläche in zwei Flächen zerlegt. Das heisst $F' = F + 1$ und $E' = E$. Wie im Fall 1 gilt wieder die Polyederformel.

3. Fall: Die neue Kante verbindet eine neue und eine vorhandene Ecke. Das heisst $E' = E + 1$ und die Anzahl der Flächen bleibt gleich ($F' = F$)

$E' + F' = (E + 1) + F \stackrel{?}{=} (K + 1) + 2 \Longleftrightarrow E + F = K + 2$ gilt nach Induktionsvoraussetzung, $\square$