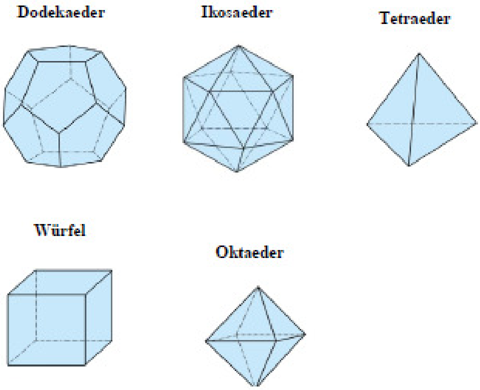
Reguläre Polyeder

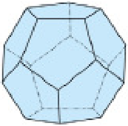
Def. Ein regulären Polyeder ist ein konvexes Polyeder mit folgenden zusätzlichen Eigenschaften:
(a) Jede Fläche eines regulären Polyeders ist ein reguläres n-Eck. Das heißt alle Seitenlängen/alle Winkel des n-Ecks sind gleich. ($n \geq 3$) .
(b) An jeder Ecke eines regulären Polyeders treffen genau m Kanten zusammen. ($m \geq 3$)

Beispiele von regulären Polyedern: Platonische Körper

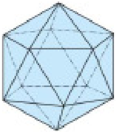


Benannt sind die Platonischen Körper nach dem griechischen Philosophen Platon (ca. 428 - 348 v. Chr.). Für ihn war die Tatsache, dass es nur fünf dieser Körper geben kann, so bedeutend, dass er sie in seiner Lehre den vier antiken Elementen bzw. dem Kosmos zuordnete: Tetraeder - Feuer, Würfel - Erde, Oktaeder - Luft, Ikosaeder - Wasser, Dodekaeder - Kosmos.

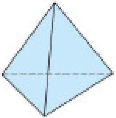
Dodekaeder



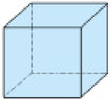
Ikosaeder



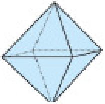
Tetraeder



Würfel



Oktaeder



Name	Tetraeder	Oktaeder	Ikosaeder	Würfel	Dodekaeder
Oberflächenform	gl.seitige Dreiecke	gl.seitige Dreiecke	gl.seitige Dreiecke	Quadrate	regelmäßige Fünfecke
n , m	3 , 3	3 , 4	3 , 5	4, 3	5 , 3
E :	4	6	12	8	20
F :	4	8	20	6	12
K :	6	12	30	12	30

Satz über platonische Körper. Die fünf platonischen Körper sind die einzigen regulären Polyeder (bis auf Isometrie oder Ähnlichkeitstransformation)

Bemerkung. Wir werden nur nur den "kombinatorischen" Teil des Satzes beweisen; wir zeigen also nur, dass die Anzahl von Ecken/Kanten/Facetten in einem regulären Polyeder wie in bekannten Fällen ist. "Metrischer Teil" der Aussage, also dass die zwei reguläre Polyeder mit gleichen kombinatorischen Struktur ähnlich sind, wird nicht bewiesen aus der Zeitgründen; sie folgt aus den Starrheitssatz von Cauchy (bewiesen z.B. im "Buch der Beweise" von Aigner und Ziegner).

Beweis:

Wir gehen nun von einem allgemeinen regulären Polyeder RP mit E Ecken, F Facetten und K Kanten aus. n und m seien wie in der Definition des regulären Polyeders: Jede Fläche ist ein reguläres n-Eck, und an jeder Ecke treffen genau m Kanten zusammen.
Mit Hilfe von n und m lassen sich folgende Beziehungen herstellen: Da an jeder Ecke von RK genau m Kanten angrenzen, zählt Em alle Kanten, aber jede genau zweimal, da sie ja genau zwei Ecken hat. Desweiteren hat jede Fläche F genau n Begrenzungskanten. Daher ist $F \cdot n$ die Anzahl aller Kanten, wieder wird jede Kante doppelt gezählt. Jede Kante begrenzt genau zwei Flächen. Also ergibt sich:

$$K = \frac{E \cdot m}{2} \qquad (1)$$

$$F = \frac{2 \cdot K}{n} \qquad (2)$$

$K = \frac{E \cdot m}{2}$	(1)
$F = \frac{2 \cdot K}{n}$	(2)

Da die Eulersche Polyederformel für alle konvexen Polyeder gilt, insbesondere auch für das reguläre Polyeder RP. Wir setzen also in die Formel ein und erhalten folgende Gleichung:
$2 = E - \frac{E \cdot m}{2} + \frac{2 \cdot K}{n}$.
Wir bringen die rechte Seite auf den gemeinsamen Nenner $2 \cdot n$.
$2 = \frac{2nE - nmE + 4 \cdot K}{2n}$.
Wir ersetzen das verbleibende K noch einmal durch $\frac{E \cdot m}{2}$ aus (1):
$2 = \frac{2nE - nmE + 2E \cdot m}{2n}$. Vereinfacht ergibt sich:
$2 = \frac{E}{2n}(2n - mn + 2m)$.

Wir betrachten nun den Ausdruck im Inneren der Klammer näher: $2n - mn + 2m$. Betrachten wir dazu den Ausdruck $(n-2) \cdot (m-2)$:
$(n-2) \cdot (m-2) = nm - 2m - 2n + 4$.Man sieht, dass 3 Produkte mit negativem Vorzeichen aus „Klammerausdruck“ darin vorkommen. Das heißt, man kann den Klammer Ausdruck $2n - mn + 2m$ umformen auf $4 - (n-2) \cdot (m-2)$ und erhält die neue Gleichung:
$2 = \frac{E}{2n}\big(4 - (n-2) \cdot (m-2)\big) \Longrightarrow \frac{4n}{E} = \big(4 - (n-2) \cdot (m-2)\big)$.

$\Longrightarrow \frac{4n}{E} = \left(4 - (n-2)\cdot(m-2)\right)$.
Da die Zahl $\frac{4n}{E}$ offensichtlich positiv ist, muß auch die rechte Seite der Gleichung positiv sein und es ergibt sich folgende Ungleichung:
$4 > (n-2)\cdot(m-2)$.
Desweiteren wissen wir aus der Definition, dass $n, m \geq 3$ gelten muss. Wenn man nun für $n-2=a$ und für $m-2=b$ setzt, sieht man, dass $a \geq 1$ und $b \geq 1$ gelten muss.

Also: Für welche $a, b \in \mathbb{N}$ ist $a \cdot b < 4$ erfüllt? Für (a, b) gibt es, wie man leicht sieht, nur die folgenden Möglichkeiten:
$(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1)$
Daraus ergeben sich für n und m folgende Möglichkeiten für die (n, m) - Paare:
$(3,3),(3,4),(3,5),(4,3),(5,3)$: das sind genau 5 platonischen Körper.

Name	Tetraeder	Oktaeder	Ikosaeder	Würfel	Dodekaeder
Oberflächenform	gl.seitige Dreiecke	gl.seitige Dreiecke	gl.seitige Dreiecke	Quadrate	regelmäßige Fünfecke
n , m	3 , 3	3 , 4	3 , 5	4, 3	5 , 3
E :	4	6	12	8	20
F :	4	8	20	6	12
K :	6	12	30	12	30

Der Satz ist damit bewiesen.