Neues Thema: Einführung in die Differentialgeometrie

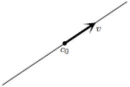
Plan:

- Kurven und Kurvenlänge (der Beweis des Satzes auf Folie 11 ist im Skript enthalten, wird aber nicht besprochen)
- Induzierte Metrik auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}^n$: allgemeine Konstruktion und Spezialfall der Sphäre
- Großkreise als "Geraden"
- Sphärischer Sinussatz (ohne Beweis); Dreiecksungleichung
- Beweis, dass Großkreise kürzeste Kurven auf einer Sphäre sind
- Nichteuklidsche Geometrie: Minkowski-Raum, Hyperbolischer Raum als "Sphäre des Minkowski-Raums"

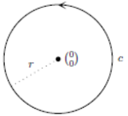
Glatte Kurven (Wiederholung aus Vorl. 7b)

Def. Eine (glatte) Kurve ist das Bild einer Abbildung
$C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$, d.h., $C(t) = \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \\ \vdots \\ C_n(t) \end{pmatrix}$ wobei $C_1, C_2, ..., C_n$ stetig differenzierbar sind, und $(C_1')^2 + (C_2')^2 + ... + (C_n')^2 > 0$.
Physikalisch kann man eine Kurve als die Bahn eines Teilchens verstehen.

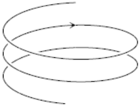
Beispiele



Bsp. Eine Gerade können wir folgendermaßen als glatte parametrisierte Kurve schreiben:
$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $c(t) = c_0 + t \cdot v$, wobei $c_0 \in \mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Das ist eine reguläre Kurve, weil die Bedingung $c'(t) = v \neq \vec{0}$ offensichtlich erfüllt ist. Ist der Definitionsbereich nicht $\mathbb{R}$, sondern ein Intervall $I = [a, b]$, so ist die Kurve eine Strecke.



Bsp. Eine Kreislinie in der Ebene um den Mittelpunkt $(0, 0)$ mit Radius $r > 0$ ist gegeben durch
$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, c(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(t) \\ r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$.
Die Kurve ist ebenfalls glatt, da $c'(t) = \begin{pmatrix} -r \cdot \sin(t) \\ r \cdot \cos(t) \end{pmatrix} \neq \vec{0}$.



Bsp. Eine Schraubenlinie im 3-dimensionalen Raum ist gegeben durch $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $c(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \sin t \\ r \cdot \cos t \\ h \cdot t \end{pmatrix}$ für festes $r > 0$ und $h > 0$.

In der Vorl. 7b haben wir Winkel zwischen 2 Kurven definiert; jetzt definieren wir die Länge einer Kurve.

Zwei (äquivalente) Definitionen der Kurvenlänge

Die erste Definition ist Ihnen aus der Analysis bekannt:
Def. Die Länge einer parametrisierten glatten Kurve $c : I \to \mathbb{R}^n$ ist die Zahl

$$L(c) := \int_I |c'(t)| dt$$

Hier ist $|c'(t)| = \sqrt{c_1'(t)^2 + ... + c_n'(t)^2}$.

Falls $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall ist, ist das Längenintegral ein Riemann-Integral und $L(c) < \infty$.

Wenn I nicht kompakt ist, kann es ein uneigentliches Riemann- oder Lebesgue-Integral sein, möglicherweise mit $L(c) = \infty$.

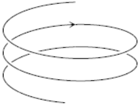
Aus der Definition folgt: Für eine glatte Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ und ein beliebiges $t \in [a, b]$ gilt:

$$L(c) = L(c_{|[a,s]}) + L(c_{|[s,b]})$$

(weil $\int_a^s f(t)dt + \int_s^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$)
Das erlaubt die Länge auch für stückweise-glatte Kurven zu definieren (später brauchen wir die Länge von Polygonzügen).

Länge einer Schraubenlinie

Bsp. Eine Schraubenlinie ist durch $c : [a,b] \to \mathbb{R}^3; c(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \sin t \\ r \cdot \cos t \\ h \cdot t \end{pmatrix}$ definiert.



Wir rechnen die Länge aus:

$$c'(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos t \\ -r \cdot \sin t \\ h \end{pmatrix}.$$

Die Länge des Geschwindigkeitsvektors $c'(t)$ ist somit
$|c'(t)| = \sqrt{(r \cdot \cos t)^2 + (-r \cdot \sin t)^2 + h^2} = \sqrt{r^2 + h^2}$
Dann gilt:

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{r^2 + h^2} dt = (b-a) \cdot \sqrt{r^2 + h^2}.$$

Längen von Strecken und Kreisen

Die Rechnung für die Schraubenlinie liefert auch die Länge von Strecken und Kreisen oder Kreissegmenten (=Kreisbögen), denn eine Strecke ist eine Schraubenlinie mit $r = 0$ und eine Kreislinie eine Schraubenlinie mit $h = 0$.

Wir betrachten das Intervall $I = [a, b]$ und die Strecke $c : I \to \mathbb{R}^n$, $c(t) = c_0 + t \cdot v$, wobei $c_0 \in \mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann gilt $c'(t) = v$ und somit $L(c) = \int_a^b |v| dt = (b - a)|v|$, was der (euklidische) Abstand von $c(a) = c_0 + a \cdot v$ und $c(b) = c_0 + b \cdot v$ ist.

Wir sehen, dass die Länge in Sinne der neuen Definition mit der Länge einer Strecke in Sinne der alten Definition, also mit dem (euklidischen) Abstand zwischen deren Endpunkten, übereinstimmt.

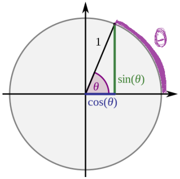
(Bogen)länge eines Kreissegments

Bsp. Wir betrachten eine Kreislinie in der Ebene um den Mittelpunkt $(0,0)$ mit Radius $r > 0$. Sie ist gegeben durch
$c : I \to \mathbb{R}^2, c(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(t) \\ r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$.
Die Kurve ist glatt, da $c'(t) = \begin{pmatrix} -r \cdot \sin(t) \\ r \cdot \cos(t) \end{pmatrix} \neq \vec{0}$.

Als Definitionsbereich nehmen wir $I = [a, b]$; falls $b - a < 2\pi$ ist die Abbildung c injektiv. Es gilt:

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{(-r \cdot \sin(t))^2 + (r \cdot \cos(t))^2} dt = \int_a^b r dt = (b-a)r.$$

Wir sehen, dass die Länge des (vollen) Kreises gleich $2\pi r$ ist, und dass die Länge eines Kreissegments proportional ist zum entsprechenden Winkel (mit Proportionalitäts-Koeffizient r).



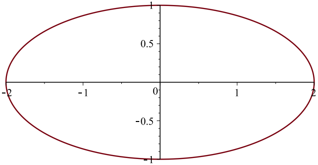
Falls $r = 1$ und $a = 0$ (sodass $c(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$), entspricht b dem Bogenwinkel θ auf dem Bild: $c(b) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$. Also: Die x-Koordinate ist $\cos(\theta)$ und die y-Koordinate $\sin(\theta)$.

Beispiel: Ellipse

Im Fall der Schraubenlinie (inkl. Kreisbögen und Strecken) konnten wir die Länge der Kurve explizit ausrechnen. I.d.R. ist das leider nicht möglich, weil der Integrand nicht immer durch elementare Funktionen ausgedrückt werden kann.

Bsp. Die Ellipse mit Halbachsen $a, b > 0$,

$$c : [0; 2\pi) \to \mathbb{R}^2, \ c(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$$



Ellips mit Halbachsen $a = 2, b = 1$.

hat den Geschwindigkeitsvektor $c'(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix}$.

Ihre Länge ist das sogenannte elliptische Integral $L(c) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt$, welches für $a \neq b$ nicht elementar integrierbar ist.

Kurvenlänge ist ein geometrischer Begriff

Obwohl die Definition der Kurvenlänge eine Parametrisierung der Kurve benötigt, ist sie ein geometrischer Begriff, d.h., sie hängt nicht von Parameterisierung ab und ist bewegungsunabhängig:

Wir zeigen zuerst die Bewegungsunabhängigkeit. Wir nehmen eine Isometrie $F(x) = Ox + b$, wobei O eine orthogonale Matrix ist, und betrachten die Kurve $\tilde{c}(t) = F(c(t))$. Dann gilt $\tilde{c}'(t) = dF(c'(t)) = Oc'(t)$. Folglich ist $|c'(t)| = |\tilde{c}'(t)|$ und die Integranden in der Formel sind gleich:

$$\int_I |c'(t)| dt = \int_I |\tilde{c}'(t)| dt.$$

Parametrisierungsunabhängigkeit

Um die Parametrisierungsunabhängigkeit zu beweisen, benötigen wir die Substitutionsformel aus der Analysis I:

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s)\, ds.$$

Unter Verwendung dieser Formel mit $f(t) = |c'(t)|$ haben wir dann:

$$L(\tilde{c}) = \int_{\tilde{I}} \left|(c \circ \varphi)'(t)\right| dt \overset{\text{Kettenregel}}{=} \int_{\tilde{I}} \left|c'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\right| dt \overset{\text{Substitution}}{=} \int_I \left|c'(s)\right| ds = L(c)$$

Approximation von Kurven durch Polygonzüge (geometrische Definition der Kurvenänge)

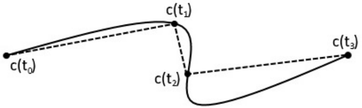
Definition

Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Kurve.

1. Eine **Unterteilung** eines Intervalls $[a, b]$ sind Punkte $a = t_0 < t_1 < .. < t_m = b$. Die Länge des längsten Zwischenintervalls $\max_{i=1}^{m} |t_i - t_{i-1}|$ heißt **Feinheit**.
2. Die Punkte $P_i = c(t_i), i = 0, .., m$ bilden einen **Polygonzug in** c, bestehend aus den Strecken $\overline{P_{i-1}P_i}$.
3. Die **Länge** eines solchen Polygonzugs ist $L(P) = \sum_{i=1}^{m} |P_i - P_{i-1}|$.

Approximation von c durch Polygonzüge

Idee: Wenn wir Polygonzüge mit immer kleinerer Feinheit wählen, approximieren diese die Kurve c immer besser.



Tatsächlich kann man die Bogenlänge durch die Polygonzüge approximieren. Es gilt:

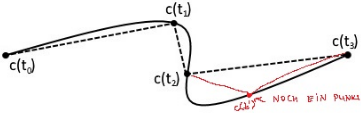
Satz. Für C^1-Kurven $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ gilt: $L(c) = \sup_{P \text{ Polygonzug in } c} L(P)$

Links steht die 'normale, oben definierte' Länge $L(c) = \int_a^b |c'(t)| dt$, rechts die kleinste obere Schranke für die Länge aller möglichen (endlichen) Polygonzüge in c.

"Verfeinerung" der Unterteilung vergrößert Länge des Polygonzugs

Satz. Für C^1-Kurven $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ gilt: $L(c) = \sup\limits_{P \text{ Polygonzug in } c} L(P)$

Statt der Unterteilung $t_0 < t_1 < t_2 < t_3$ nehmen wir eine "feinere" Unterteilung $t_0 < t_1 < t_2 < t' < t_3$. Wegen der Dreiecksungleichung wird damit die Länge des approximierten Polygozugs nicht kleiner.



Weil wir in der Formel im Satz oben das Supremum über die Länge aller Polygonzüge nehmen, können wir deshalb später o.B.d.A. annehmen, dass die Intervalle $t_i - t_{i-1}$ beliebig klein sind.

$$\boxed{\textbf{Satz. } \text{Für } C^1\text{-Kurven } c:[a,b]\to\mathbb{R}^n \text{ gilt: } L(c) = \sup_{P \text{ Polygonzug in } c} L(P)}$$

Behauptung: Für jedes $\epsilon_0 > 0$ existiert ein $\delta > 0$, s.d. für alle Polygonzüge P in c mit Feinheit $< \delta$ gilt: $|L(c) - L(P)| < \epsilon_0$.

1. Beweis des Satzes unter Annahme der Behauptung:
a.) Die Behauptung zeigt, dass es Polygonzüge gibt (nämlich mit kleiner Feinheit), deren Länge beliebig nahe an $L(c)$ kommen. Daher ist $\sup_{P \text{ Polyg. in } c} L(P) \geq L(c)$.

b.) Ist P' eine Verfeinerung von P (d.h. mit weiteren Punkten t_i), so ist $L(P') \geq L(P)$, da nach Dreiecksungleichung
$|c(t_i) - c(t_{i-2})| \leq |c(t_i) - c(t_{i-1})| + |c(t_{i-1}) - c(t_{i-2})|$ ist.
Angenommen, es gibt einen Polygonzug P_0 in c mit $L(P_0) > L(c)$.
Wegen der Behauptung gibt es $\delta > 0$, s.d. für jeden Polygonzug P mit Feinheit $< \delta$ gilt:
$|L(c) - L(P)| < \epsilon_0 := L(P_0) - L(c)$.
Nun gilt für jede Verfeinerung P_0' von P_0 mit Feinheit $< \delta$ einerseits $L(P_0') - L(c) \geq L(P_0) - L(c) = \epsilon_0$ und andererseits $|L(P_0') - L(c)| < \epsilon_0$. Dieser Widerspruch zeigt $L(P) \leq L(c)$, daher auch $\sup_P L(P) \leq L(c)$ und der Satz ist bewiesen.

2. Beweis der Behauptung: Sei $\epsilon_0 > 0$.
Schreibe $c(t) = (c_1(t), .., c_n(t))$. Da $c' : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig auf einem Kompaktum ist, ist es sogar gleichmäßig stetig. Daher gibt zu jedem (noch beliebigem, wir wählen es später) $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, s.d.

$$|t - s| < \delta \quad \Rightarrow |c'(t) - c'(s)| < \epsilon.$$

Insbesondere für $j = 1, .., n$

$$|t - s| < \delta \quad \Rightarrow (c_j'(t) - c_j'(s))^2 \leq (c_1'(t) - c_1'(s))^2 + .. + (c_n'(t) - c_n'(s))^2 < \epsilon^2 . (*)$$

Suche δ, s.d. $L(c) - L(P) < \epsilon_0$ für alle P mit Feinheit $< \delta$

Mittelwertsatz: Für C^1-Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gibt es $\tau \in (a,b)$ mit $f'(\tau) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

3. Sei $t_0, .., t_k$ eine Unterteilung der Feinheit $< \delta$. Wir wenden den MWS an auf die j-te Komponente auf dem i-ten Intervall $c_j : [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{R}$ und bekommen $\tau_j^i \in (t_{i-1}, t_i)$ mit

$$c_j'(\tau_j^i) = \frac{c_j(t_i) - c_j(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}.$$

Wir haben für jedes Intervall einen Vektor $v^i := (c_1'(\tau_1^i), .., c_n'(\tau_n^i))$. Es ist

$$|c(t_i) - c(t_{i-1})|^2 = \sum_{j=1}^{n} (c_j(t_i) - c_j(t_{i-1}))^2 = (t_i - t_{i-1})^2 \sum_{j=1}^{n} c_j'(\tau_j^i)^2 = (t_i - t_{i-1})^2 |v^i|^2$$

Überprüfen, ob jeden solche Polygonzug (mit Feinheit $< \delta$) $L(c) - L(P) < \epsilon_0$ erfüllt:

$$\begin{aligned} L(c) - L(P) &= \sum_{i=1}^{m} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} |c'(s)| ds - |c(t_i) - c(t_{i-1})| \right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |c'(s)| - \left| \frac{c(t_i) - c(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right| ds \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |c'(s) - v^i| ds \quad \text{(Def. } v^i \text{ \& Dreiecksungleichung)} \end{aligned}$$

Aus glm. Stetigkeit haben wir $(*)$: $\quad |t-s|<\delta \quad \Rightarrow |c_j'(t)-c_j'(s)| \leq \epsilon.$
Letzte Folie: $\quad L(c)-L(P) \leq \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} |c'(s)-v^i| ds$

Für $s \in (t_{i-1}, t_i)$ ist $|\tau_j^i - s| < \delta$ (da P Feinheit $< \delta$ hat). Daher

$$|c_j'(s) - c_j'(\tau_j^i)| < \epsilon. \quad (*)$$

Die linke Seite sind (der Betrag der) Komponenten von $c'(s)-v^i$ für $s \in (t_{i-1}, t_i)$ und es ist

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} |c'(s)-v^i| ds \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\epsilon^2 + .. + \epsilon^2} ds = \sqrt{n}(t_i - t_{i-1})\epsilon$$

Insgesamt ist also

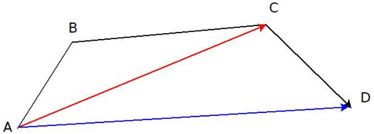
$$L(c)-L(P) \leq \sqrt{n}\epsilon \sum_{i=1}^{k} (t_i - t_{i-1}) = \sqrt{n}(b-a)\epsilon$$

Wir wollen $L(c)-L(P) < \epsilon_0$ und sind noch frei in der Wahl von ϵ.
Wir setzen $\epsilon = \frac{1}{2\sqrt{n}(b-a)}\epsilon_0$ und erhalten ein $\delta > 0$, s.d. für jeden Polygonzug P mit Feinheit $< \delta$ gilt: $L(c)-L(P) \leq \frac{\epsilon_0}{2} < \epsilon_0$. $\square$

Folgerung: Geraden sind die kürzesten Verbindungslinien

Beweis: Für Polygonzüge folgt die Aussage aus der Dreiecksungleichung. Z.B. im Bild unten ist $|AC| \leq |AB| + |BC|$ und $|AD| \leq |AC| + |CD|$. Schließlich gilt:

$$|AB| + |BC| + |CD| \geq |AC| + |CD| \geq |AD|.$$



Weil die Länge der Kurve der Grenzwert der Längen von approximierenden Polygonzügen ist, gilt die Ungleichung für alle (glatten) Kurven.

Zwei Methoden, eine Metrik auf $Y \subseteq X$ zu "induzieren"

Diese zwei Methoden liefern verschiedene Ergebnisse. Die erste Methode haben Sie in der Vorlesung Analysis wahrscheinlich gesehen. Diese Methode wiederhole ich auf dieser Folie; sie ist für unsere Vorlesungen nicht interessant.

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$ eine nichtleere Teilmenge von X. Wir definieren eine Abstandsfunktion auf Y wie folgt:

$$\forall x, y \in Y \; d_Y(x, y) = d_X(x, y).$$

Mit anderen Worten: d_Y ist die Beschränkung der Funktion d_X (welche auf $X \times X$ definiert ist) auf $Y \times Y$:

$$d_Y = d_{X\,|\,Y \times Y}.$$

Alle Axiome des metrischen Raums sind erfüllt, weil es sich bei allen Axiomen um eine Eigenschaft von einem beliebigen Punkt (Definitheit), zwei Punkten (Symmetrie) oder drei Punkten (Dreiecksungleichung) handelt. Alle Axiomen sind erfüllt für alle x bzw. x, y, bzw. x, y, z aus dem größeren Raum X. Dann sind sie auch für alle x, y, z aus dem kleineren Teilraum Y erfüllt.

Bemerkung. Wie oben gesagt, wird diese induzierte Metrik oft in der Analysis verwendet, hat aber keine Bedeutung für unsere Geometrie-Vorlesung. Für uns ist die Definition der induzierten Metrik auf den nächsten Folien interessant; diese liefert aber eine andere Metrik als die Definition oben.

2. Methode, eine Metrik auf $Y \subseteq X$ zu induzieren

Wir behandeln nur den Spezialfall, dass $Y = S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$ die Standard-Sphäre ist und $X = \mathbb{R}^3$ (mit dem Euklidischen Abstand). Die Methode kann man auch auf allgemeine metrische Räume verallgemeinern. Eigentlich, um diese Methode anzuwenden brauchen wir nur die Längen von Kurven, welche auf die Sphäre liegen. Am Ende der Vorlesung werden wir diese Methode auf Pseudo-Sphäre anwenden und die hyperbolische Metrik bekommen; wir werden die Längen von Kurven auf Pseudo-Sphäre mit Hilfe von Minkowski-Metrik definieren.

Wir definieren den Abstand von zwei Punkten $x, y \in S^2$ als das Infimum über die Länge aller glatten Kurven, die x und y auf S^2 verbinden:

$$d_{S^2}(x,y) := \inf\{L(\gamma) \mid c : [a,b] \to S^2, \text{ mit } c(a) = x, \gamma(b) = y\}$$

Satz. (S^2, d_{S^2}) ist ein metrischer Raum.

Der Beweis ist relativ einfach (man muss Symmetrie, Definitheit und Dreieckungleichung zeigen, alle drei Eigenschaften folgen aus der Definition) und wird auf der Tafel besprochen.

Unser nächstes Ziel ist eine konkrete Formel für $d_{S^2}(x, y)$.

Bemerkung. Die entsprechende Definition in $\mathbb{R}^2$ liefert die Standard-Metrik:

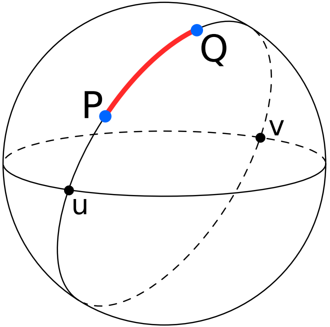
$$d_{\mathbb{R}^2}(x, y) := \inf\{L(\gamma) \mid c : [a, b] \to \mathbb{R}^2,\ \text{mit } c(a) = x, \gamma(b) = y\}$$

Dann gilt $d_{\mathbb{R}^2}(x, y) = |x - y|$, weil die kürzeste Strecke, welche x und y verbindet, das Intervall $\overline{xy}$ ist.

Auch im Fall der Sphäre werden wir die kürzeste Linie finden, welche zwei Punkte auf der Sphäre verbindet. Diese Kürzesten sind die sogenannten Großkreise (Definition auf der nächsten Folie).

Im Beweis, dass die Segmente von Großkreisen die kürzesten Verbindungslinien sind, wird die sphärische Version der Dreieckungleichung benutzen, welche wir mithilfe des sphärischen Sinussatzes zeigen.

Def. Ist E^2 eine durch den Mittelpunkt $\vec{0}$ der Sphäre verlaufende Ebene, so bezeichnet man den Schnitt $E \cap S^2$ als einen Großkreis.



Großkreise spielen in der sphärischen Geometrie dieselbe Rolle wie Geraden in der (euklidischen) Geometrie der Ebene.

Es gilt: Zwei verschiedene Großkreise schneiden sich in genau zwei Punkten. Die Schnittpunkte liegen auf S^2 diametral gegenüber. Für jede zwei beliebigen (unterschiedlichen) Punkte, welche nicht diametral gegenüber liegen, existiert genau ein Großkreis, welcher diese zwei Punkte enthält.

Satz. Ist $c : [a, b] \to S^2$ die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten der Sphäre, so ist c Segment eines Großkreises.

Wir geben den Beweis ein bisschen später, zuerst benutzen wir den Satz um eine explizite Formel für den sphärischen Abstand zu bekommen.

Nach dem Satz oben ist der sphärische Abstand gerade gegeben als die Länge eines Kreisbogens, der (in einer Ebene) durch die Punkte A und B verläuft (und Mittelpunkt $\vec{0}$ hat). Wir haben die Länge eines solcehn Kreissegmentes in dieser Vorlesung bereits berechnet (siehe Folie 7): Weil der Radius gleich 1 ist, entspricht die Länge dieses Bogens dem Winkel:

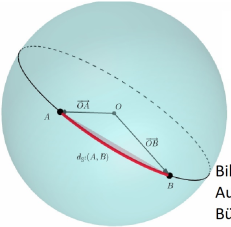
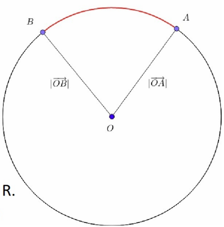


Bild habe ich aus Ausarbeitung von R. Büthe genommen



Also gilt:

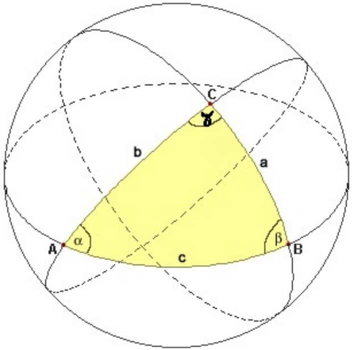
$$\cos(\sphericalangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})) = \frac{\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle}{\underbrace{|\overrightarrow{OA}|}_{=1} \cdot \underbrace{|\overrightarrow{OB}|}_{=1}} = \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle$$

für den sphärischen Abstand die Formel

$$d_{\mathbb{S}^2}(A, B) = \sphericalangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \arccos(\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle).$$

Sphärische Dreiecke

Ein sphärisches Dreieck ist der Teil der Kugeloberfläche, der von drei Großkreisbögen begrenzt wird. Als Ecken des Kugeldreiecks werden die Punkte bezeichnet, in denen sich je zwei dieser Großkreise schneiden.

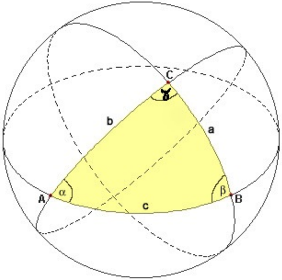


Jede 3 Großkreise teilen die Sphäre in 8 sphärische Dreiecke: 1 Grunddreieck, 1 Gegendreieck, 3 Scheiteldreiecke, 3 Nebendreiecke

Sphärischer Sinussatz

Sphärischer Sinussatz. Für die Seiten a, b, c und für die Winkel α, β, γ eines sphärischen Dreiecks Δ_{ABC} (wie auf dem Bild) gilt:

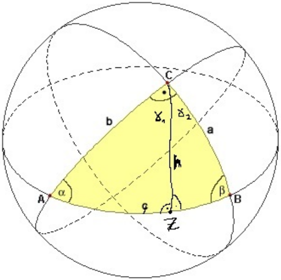
$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(a)} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(b)} = \frac{\sin(\gamma)}{\sin(c)}.$$



Der Beweis wird ausgelassen. Ein möglicher Beweis ist "brute force": Die Längen a, b, c bestimmen die Seiten des Tetraeders $\vec{0}ABC$ und deswegen auch die Winkel α, β, γ; man kann alles ausrechnen und beweist die nötige Formel. In der Literatur werden Sie verschiedene elegantere Beweise finden.

Beweis dass die Großkreise die kürzeste sind (Schema)

Zuerst zeigen wir die **sphärische Dreieckungleichung**: Für das Dreieck auf dem Bild unten gilt: $a + b \geq c$. Wir werden dies mit Hilfe des sphärischen Sinussatz beweisen:



Wir betrachten die Höhe auf der Seite a. Der Sinussatz für Δ_{ACZ} liefert $\frac{\sin(90^\circ)}{\sin(b)} = \frac{\sin \gamma_1}{\sin(|AZ|)}$. Dann gilt: $\sin(b) \geq \sin(|AZ|)$ und deswegen $b \geq |AZ|$.

Analog gilt: $a \geq |BZ|$. Somit: $a + b \geq |AZ| + |BZ| = c$.

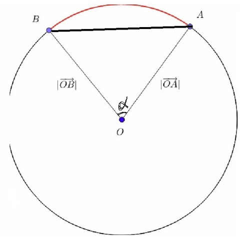
Wie wir am Anfang dieser Vorlesung besprochen haben, ist

$$L(c) = \sup_{P \text{ Polygonzug in } c} L(P).$$

Wegen der (euklidischen) Dreiecksungleichung können wir annehmen, dass die Polygonzüge "fein" sind, das heißt, dass die entsprechende Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ so ist, dass $\max_i |t_i - t_{i-1}|$ klein ist. Dann ist die Länge des Intervalls $\overline{c(t_i)c(t_{i+1})}$ quadratisch nah zur Länge des Großkreisbogens, welcher $c(t_i)$ und $c(t_{i+1})$ verbindet. Wegen des Kosinussatzes ist

$$|AB| = \sqrt{|OB|^2 + |OA|^2 - 2|OB| \cdot |OA| \cos\alpha} = \sqrt{2(1-\cos\alpha)}$$

$$= \sqrt{2(1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \tfrac{1}{24}\alpha^4 - \dots)} = \alpha + \text{Termen der Ordnung} \leq 2$$



Nach dem Satz von Folie 11 ist die Länge der Kurve die kleinste obere Schranke über die Länge aller möglichen (endlichen) Polygonzüge in c:

$$\boxed{\textbf{Satz.} \text{ Es gilt: } L(c) = \sup_{P \text{ Polygonzug in } c} L(P)}$$

Links steht die 'normale, oben definierte' Länge $L(c) = \int_a^b |c'(t)|dt$, rechts die kleinste obere Schranke der Länge aller möglichen (endlichen) Polygonzüge in c.

Wir betrachten die Kurve $c : [a, b] \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ und eine “feine” Unterteilung $a = t_0 < t_1 < ... < t_m = b$ des Intervalls $[a, b]$.

Die Länge $L(P)$ des entsprechenden Polygonzugs ist dann nah zur Summe der Längen von Großkreisbögen, welche $c(t_{i-1})$ und $c(t_i)$ verbinden. Wegen der sphärischen Dreieckungleichung ist die Summe der Längen von solchen Großkreisbögen nicht kleiner als die Länge des Großkreisbogens, welcher $c(a)$ und $c(b)$ verbindet. Dann ist der Großkreisbogen, welcher $c(a)$ und $c(b)$ verbindet, die kürzeste Verbindungskurve auf der Sphäre zwischen $c(a)$ und $c(b)$. Damit ist der Satz auf Folie 21 bewiesen.

Minkowski-Raum der Dimension 3

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit folgendem Pseudo-Skalarprodukt: $\langle x, y \rangle = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ (Unterschied zum euklidischen Skalarprodukt: "Minus" vor $x_1 y_1$.) Das Pseudo-Skalarprodukt ist eine symmetrische, nichtausgeartete Biliniearform mir der Gramschen Matrix $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$. Das euklidische Skalarprodukt wird im diesem Abschnitt nicht betrachtet; die Bezeichung $\langle x, y \rangle$ wird stattdessen für das Pseudo-Skalarprodukt verwendet.

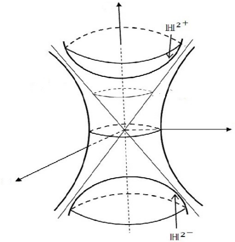
Für alle Vektoren v mit $\langle v, v \rangle > 0$ definieren wir eine (Pseudo)-Länge: $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Solche Vektoren heißen raumartig. Wir sagen, dass eine glatte Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ raumartig ist, wenn für jedes t der Geschwindigkeitsvektor $c'(t)$ raumartig ist. Für solche Kurven ist eine (Pseudo-)Kurvenlänge definiert:

$$L(c) = \int_a^b |c'(t)| dt|.$$

Bsp. Wir betrachten die Pseudo-Sphäre:

$$H^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, x \rangle = -1\}$$

H^2 ist gegeben durch die Gleichung $-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1$ und deswegen ein Hyperboloid. H^2 besteht aus 2 Zusammenhangskomponenten:
$H^2_+ = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, x \rangle = -1 \text{ und } x_1 > 0\}$ und
$H^2_- = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, x \rangle = -1 \text{ und } x_1 < 0\}$.



Bemerkung. Auf dem Bild zeigt die x_1-Achse nach oben.

Lemma. Jede glatte Kurve c mit Bahn auf H^2 ist raumartig. (Beweis des Lemmas ist relativ einfach, wird aber nicht behandelt)

(Bild aus Bekar et al 2018)

Ähnlich wie auf der Sphäre kann man eine Abstandsfunktion auf der Pseudo-Sphäre H^2_+ definieren:

$$d_{H^2_+}(x, y) := \inf\{L(\gamma) \mid c : [a, b] \to H^2_+, \text{ mit } c(a) = x, \gamma(b) = y\}.$$

Das Paar $(H^2_+, d_{H^2_+})$ ist ein metrischer Raum (Beweis wie bei der Sphäre).

Def. Der metrische Raum $(H^2_+, d_{H^2_+})$ heißt hyperbolische Ebene.

Großhyperbeln als "Geraden"

Was in der Euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ die Geraden und auf der Sphäre S^2 die Großkreise sind, sind auf auf H^2_+ die Großhyperbeln: Diese entstehen als Schnittmenge von H^2_+ mit Ebenen, die durch $\vec{0}$ verlaufen.

Viel Erfolg bei Ihren Prüfungen

Dies ist die letzte Vorlesung des Kurses. Vielen Dank für ihre Teilnahme und viel Erfolg für die Prüfungszeit!