Plan

- Was versteht man unter Geometrie
- Wahl des Zugangs zur Geometrie

Was versteht man unter Geometrie? Das Studium von mathematischen Modellen des Raumes, der uns auf Grund der Anschauung vertraut ist. In diesem Kurs werde ich wie folgt vorgehen: ich schlage $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ als Modelle für die Ebene bzw. den Raum vor, und untersuche sie.

Mathematische Modelle des Raumes

Das am meisten verwendete Modell ist der $\mathbb{R}^3$, also die Menge aller Tripel $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ von reellen Zahlen, oder $\mathbb{R}^2$ (wir werden vorerst meistens $\mathbb{R}^2$ betrachten).

Wir folgen daher von nun an Ideen des Franzosen Rene Descartes (1596–1650) und charakterisieren Punkte durch Koordinaten, die die Lage der Punkte in der Ebene/im Raum beschreiben.
Dies ermöglicht es, Methoden aus der Algebra (und dies werden wir oft machen) und der Analysis (kommt in dieser Vorlesung auch vor, aber seltener) auch in der Geometrie einzusetzen,
und erweitert unseren mathematischen Werkzeugvorrat ganz erheblich.
Wir werden ziemlich oft auf Vorwissen aus Analysis und (lineare) Algebra zurückgreifen.

Außerdem werden wir sehen, dass die intuitiven Aussagen, die man in der Schule verwendet (z.B. SSS, SWS und WSW Kongruenzsätze), mathematisch sauber beweisbar sind.
Aber es gibt auch eine Reihe anderer Modelle, die unter Umständen für gewisse Zwecke günstiger sind und nicht unbedingt zum $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$ äquivalent sein müssen. Dazu gehören sphärische Geometrie, hyperbolische Geometrie, und Minkowski-Geometrie.

Wiederholung – Lineare Algebra

Wir betrachten $\mathbb{R}^n = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R}\}$. Die Elemente des $\mathbb{R}^n$ werde ich manchmal als Punkte und manchmal als Vektoren bezeichnen (später, im Kapitel "affine Geometrie", wird klar werden warum ich manchmal "Punkt" und manchmal "Vektor" sage).

Wir definieren die Operationen Addition (von zwei Elementen des $\mathbb{R}^n$):

$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$

und Multiplikation von Zahlen (also Elementen von $\mathbb{R}$) und Elementen des $\mathbb{R}^n$:

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$.

Wie Sie aus LA wissen, ist $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ein linearer Vektorraum.

Beispiele

$$\begin{pmatrix} 25 \\ 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 21 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Außerdem definieren wir das
Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.
Das ist eine Operation $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ setze $\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$.
Das ist eine symmetrische positive definite Bilinearform:
Symmetrie, d.h. die Eigenschaft $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, ist offensichtlich (weil $x_i y_i = y_i x_i$).
Bilinearität, d.h. die Eigenschaften
$\langle \lambda' x' + \lambda'' x'', y\rangle = \lambda'\langle x', y\rangle + \lambda''\langle x'', y\rangle$ und
$\langle x, \lambda' y' + \lambda'' y''\rangle = \lambda'\langle x, y'\rangle + \lambda''\langle x, y''\rangle$ ist auch einfach nachzuweisen:
$\langle \lambda' x' + \lambda'' x'', y\rangle = (\lambda' x_1' + \lambda'' x_1'')y_1 + ... + (\lambda' x_n' + \lambda'' x_n'')y_n =$
$= \lambda' x_1' y_1 + ... + \lambda' x_n' y_n + \lambda'' x_1'' y_1 + ... + \lambda'' x_n'' y_n =$
$= \lambda'\langle x', y\rangle + \lambda''\langle x'', y\rangle$.
Linearität bzgl. 2tem Eintrag zeigt man analog.
Positive Definitheit; d.h., die Eigenschaft
$\langle x, x\rangle > 0$ für $x \neq \vec{0}$ ist ebenfalls einfach zu sehen:
$\langle x, x\rangle = x_1^2 + ... + x_n^2 \overset{\text{für } x \neq \vec{0}}{>} 0$.

Einfaches Beispiel:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = -2$$

Standard Euklidischer Raum

Def. (Standard) Euklidischer Raum ist der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$.

Das bedeutet, die Elemente des Raumes sind die Punkte-Vektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$; man kann sie addieren (und bekommt auch einen Punkt-Vektor), mit Zahlen multiplizieren (und bekommt auch einen Punkt-Vektor), und auch das Skalarprodukt nehmen (und bekommt eine Zahl).

Modelle der Ebenegeometrie: $(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \langle\ ,\rangle)$.

Abstand zwischen zwei Punkten

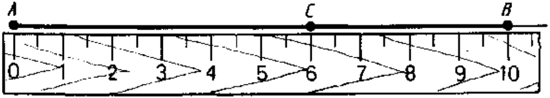
Das Skalarprodukt gibt uns die Möglichkeit den Abstand zwischen zwei Punkten zu definieren:

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0} :$$

$$d(x, y) = |xy| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}.$$

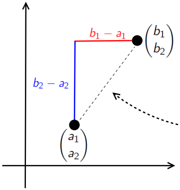
- Dies ist wohldefiniert, da $\langle x - y, x - y \rangle \geq 0$ ist, weshalb man immer die Wurzel daraus ziehen kann.
- Abstand von x zu y ist auch nicht-negativ, und ist genau dann null, wenn $x = y$.
- Abstand ist symmetrisch: $d(x, y) = d(y, x)$.

Das ist was wir von Abstand eierwarten:



Link zur Schulgeometrie: Diese Definition ist im Wesentlichen der Satz des Pythagoras:

Wir betrachten die Punkte $\binom{a_1}{a_2}$, $\binom{b_1}{b_2}$ (auf dem Bild ist $a_1 < a_2$ und $b_1 < b_2$).



Die Länge ist $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

Wir betrachten das rechtwinklige Dreieck auf dem Bild: die Katheten sind parallel zu den Achsen, und die Hypotenuse ist die Strecke, die $\binom{a_1}{a_2}$und $\binom{b_1}{b_2}$ verbindet.
Die Katheten haben die Längen $\mid b_1 - a_1 \mid$ und $\mid b_2 - a_2 \mid$.
Damit ist die Länge der Hypotenuse $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$ und ist gleich dem Abstand zwischen $\binom{a_1}{a_2}$und $\binom{b_1}{b_2}$ nach unserer Definition.

Zusammenfassung

- Ebene $= \mathbb{R}^2$ mit der zusätzliches Struktur des Euklidischen Raums.
- Geometrische Objekte (etwa Gerade, Dreieck) $=$ Teilmengen von $\mathbb{R}^2$