Plan

- Wiederholen der Definitionen von metrischen Räumen, Isometrien, Isometriegruppe.

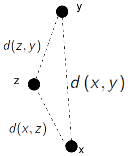
Metrische Räume – Wiederholung (Ana II/III ?)

Def. Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt eine Metrik, wenn $\forall x, y, z \in X$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(Definitheit) $\quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

(Symmetrie) $\quad d(x,y) = d(y,x),$

(Dreiecksungleichung) $\quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$



Die Nicht-Negativität $d(x,y) \geq 0$ haben wir als zusätzliche Eigenschaft angegeben, obwohl sie aus den anderen Bedingungen folgt. Sie ist daher überflüssig:

$$2d(x,y) = d(x,y) + d(x,y) \overset{\text{(Symmetrie)}}{=} d(x,y) + d(y,x) \overset{\text{(Dreiecksungleichung)}}{\geq} d(x,x) \overset{\text{(Definitheit)}}{=} 0$$

$$\Rightarrow d(x,y) \geq 0.$$

Def. Das Paar (X, d) heißt ein metrischer Raum.

Euklidischer Raum als metrischer Raum

Def – Wiederholung. Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d\colon X\times X\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt eine Metrik, wenn $\forall x,y,z\in X$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(Definitheit) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$,

(Symmetrie) $d(x,y)=d(y,x)$,

(Dreiecksungleichung) $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$.

Def. Das Paar (X,d) heißt ein metrischer Raum.

Bsp. Im Euklidischen Raum $(\mathbb{R}^n,\langle\ ,\ \rangle)$ ist die oben definierte Abstandsfunktion
$d(x,y)=|xy|=\sqrt{\langle x-y,x-y\rangle}=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}$ eine Metrik:
Definitheit folgt aus positiver Definitheit des Skalarprodukts und wurde oben besprochen;
Symmetrie folgt aus der Definition und wurde ebenfalls oben besprochen
Zum Beweis der Dreiecksungleichung benötigen wir noch einen Trick (Cauchy-Schwarz Lemma), es wurde in Linearer Algebra gemacht; ich werde die Dreiecksungleichung zunächst nicht beweisen und zunächst auch nicht benutzen.

Eine Abbildung $I : X \to X$, welche die Metrik erhält, d.h. $d(I(x), I(y)) = d(x, y)$, heißt Isometrie (wenn ich von Isometrien des $\mathbb{R}^2$ und des $\mathbb{R}^3$ spreche, werde ich auch die Bezeichnungen Bewegung, Kongruenz benutzen).

Die Menge $Iso(X, d) := \{\text{alle bijektiven Isometrien von } X\}$ heisst die Isometriegruppe von (X, d).

Die Isometriegruppe ist tatsächlich eine Gruppe im Sinne der Algebra (bitte wiederholen Sie Gruppentheorie aus der Vorlesung zur (Linearen) Algebra!). Das bedeutet, dass die Menge $Iso(X, d) := \{\text{alle bijektiven Isometrien von } X\}$ bezüglich der Operation "Verknüpfung von zwei Abbildungen" die Gruppenaxiome erfüllt. Insgesamt gibt es drei Gruppenaxiome:

(G1): $a(bc) = (ab)c$ (für alle $a, b, c \in G$) Assoziativität

(G2): Es gibt $e \in G$ mit $ea = a$. (für alle $a \in G$) Existenz eines neutralen Elements

(G3): Für jedes $a \in G$ gibt es ein $b \in G$ mit $ba = e$. Existenz eines inversen Elements

Exkurs: Wiederholung des Gruppenbegriffs und wie wir Gruppen benutzen werden

(G1): $a(bc) = (ab)c$ (für alle $a, b, c \in G$) Assoziativität

(G2): Es gibt $e \in G$ mit $ea = a$. (für alle $a \in G$) Existenz eines neutralen Elements

(G3): Für jedes $a \in G$ gibt es ein $b \in G$ mit $ba = e$. Existenz eines inversen Elements

In einer Gruppe kann man die Gleichung der Form

$$g_1 x = g_2 \qquad (*)$$

lösen (die Gruppenelemente g_1, g_2 sind bekannt, x ist ein unbekanntes Gruppenelement). Nämlich, wir multiplizieren die beide Seiten mit $(g_1)^{-1}$ von links und bekommen $x = (g_1)^{-1} g_2$. Also, jede Lösung x von $(*)$ ist notwendigerweise $(g_1)^{-1} g_2$. Auf der anderen Seite ist $x = (g_1)^{-1} g_2$ tatsächlichich eine Lösung von $(*)$, was wir durch einsetzen prüfen:

$$g_1 \left((g_1)^{-1} g_2 \right) \overset{Assoz}{=} \left(g_1 (g_1)^{-1} \right) g_2 = e g_2 = g_2.$$

Bemerkung. In der Berechnungen oben habe ich $g_1 (g_1)^{-1} = e$ benutzt. Das (G3)-Axiom sagt aber, dass ein b existiert, sodass $b g_1 = e$. Allerdings gilt (und wurde in der Vorlesung Lineare Algebra bewiesen), dass ein b sodass $bg = e$ eindeutig ist und die Gleichung $gb = e$ erfüllt.

Warum ist die Operation Verkettung von Abbildungen auf $Iso(X, d)$ wohldefiniert?

Wir müssen zeigen, dass die Verkettung von zwei bijektiven Isometrien auch eine bijektive Isometrie ist.

In der Tat, die Verkettung von bijektiven Abbildungen ist immer eine bijektive Abbildung; also muss man nur zeigen, dass $d(f \circ g(x), f \circ g(y)) = d(x, y)$ ist. Nach Definition der Verkettung, gilt $f \circ g(x) = f(g(x))$ und $f \circ g(y) = f(g(y))$. Da f eine Isometrie ist, erhalten wir $d(f(\underbrace{g(x)}_{x'}), f(\underbrace{g(y)}_{y'})) = d(g(x), g(y)) \overset{\text{weil } g \text{ Isometrie}}{=} d(x, y)$.

Damit ist $f \circ g$ wie gewünscht eine Isometrie.

Warum ist die Menge $Iso(X, d)$ eine Gruppe bzgl. der Operation Verkettung von Abbildungen?

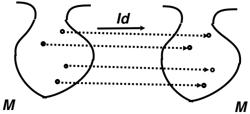
(G1): $a(bc) = (ab)c$ (für alle $a, b, c \in G$) Assoziativität

(G2): Es gibt $e \in G$ mit $ea = a$. (für alle $a \in G$) Existenz eines neutralen Elements

(G3): Für jedes $a \in G$ gibt es ein $b \in G$ mit $ba = e$. Existenz eines inversen Elements

Das Axiom $(G1)$ ist für die Operation "Verknüpfung von Abbildungen" immer erfüllt.

Bezüglich $(G2)$: das neutrale Element ist die Identitätsabbildung $Id : X \to X$, $Id(x) = x$; sie ist offensichtlich eine bijektive Isometrie.



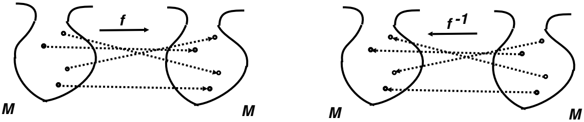
Also muss man hier nur die Existenz des inversen Elements zeigen.

Existenz des inversen Elements zu einem $f \in Iso(X, d)$.

Wiederholung. $Iso(X, d) := \{\text{alle bijektiven Isometrien von } X\}$

Als inverses Element zu $f \in Iso(X, d)$ schlage ich vor, die inverse Bijektion $f^{-1} : X \to X$ zu nehmen. Sie ist definiert durch

$$f^{-1}(x) = y \quad \text{so dass } f(y) = x. \qquad (*)$$



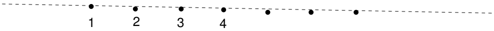
Die Regel $(*)$ liefert tatsächlich eine wohldefinierte Abbildung: da f eine Bijektion ist, ist f surjektiv, und jedes x kann man als Bild eines Elements y darstellen. Damit ist die Regel $(*)$ für alle x definiert. Da f bijektiv ist, ist f injektiv, und deswegen ist y, s.d. $f(y) = x$, eindeutig. Da f eine Bijektion ist, ist f^{-1} auch eine Bijektion.
Um zu zeigen, dass f^{-1} eine Isometrie ist, müssen wir zeigen, dass $d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) = d(x, y)$. Nach Definition sind $f^{-1}(x) = x'$ mit $f(x') = x$ und $f^{-1}(y) = y'$ mit $f(y') = y$. Dann ist $d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) = d(x', y') \overset{\text{weil } f \text{ Isometrie}}{=} d(f(x'), f(y')) = d(x, y)$ wie gewünscht.

Besprechen des Wortes “bijektiv” in der Definition von $Iso(X, d)$

$\boxed{\textbf{Wiederholung. } Iso(X, d) := \{\text{alle bijektiven Isometrien von } X\}}$

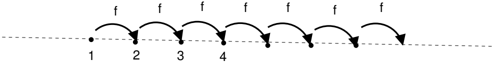
Wenn wir das Wort “bijektiv” weglassen, ist $Iso(X, d)$ nicht immer eine Gruppe:

Bsp. $X = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ und $d(k, m) := |k - m|$. Die Axiome des metrischen Raums sind einfach nachzuweisen.



Die Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeben durch $f(k) = k + 1$ ist eine Isometrie, da

$d(f(k), f(m)) = d(k+1, m+1) = |k+1-(m+1)| = |k-m| = d(k, m).$



Die Abbildung ist aber nicht bijektiv, weil sie nicht surjektiv ist: es gibt kein $y \in \mathbb{N}$ s.d. $f(y) = (y + 1) = 1$.

Wir werden aber hauptsächlich über $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ sprechen; in diesem Fall ist jede Isometrie automatisch eine Bijektion nach Satz 1.

Die Gruppe $Iso(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$

Satz 1 *Jede Isometrie I von $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ hat die Form*

$I(x) = Ox + b$, *wobei O eine orthogonale $n \times n$-Matrix ist, und $b \in \mathbb{R}^n$.*

Ferner gilt: jede Abbildung dieser Form ist eine (bijektive, wird später gezeigt) Isometrie.

Ich werde zuerst, in dem nächsten Abschnitt, die Definition von orthogonalen Matrizen wiederholen, dann die Dimension 2 sorgfältig besprechen, und erst dann den Satz beweisen.

Zusammenfassung

- Wir haben die Definition des metrischen Raums wiederholt.
- Wir haben die Struktur des metrischen Raums auf $\mathbb{R}^n$ eingeführt (Beweis der Dreiecksungleichung kommt später)
- Wir haben die Definition der Gruppe wiederholt, und haben gezeigt, dass die Menge der bijektiven Isometrien eines metrischen Raums eine Gruppe bezüglich der Operation "Hindereinanderfuhrung von Abbildungen" bildet.