Plan

- Definition und einfachste Eigenschaften von orthogonalen Matrizen
- Beschreiben von orthogonalen Matrizen in Dimension 2

Was ist eine orthogonale Matrix?

Def. (Lin. Alg.) Eine $n \times n$ Matrix $A \in Mat(n, n, \mathbb{R})$ ist orthogonal, wenn $AA^t = Id$, wobei Id die Einheitsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ und A^t die transponierte Matrix zu A ist.

Bedeutung von $AA^t = Id$.

Def. (Lin. Alg.) Eine $n \times n$ Matrix $A \in Mat(n, n, \mathbb{R})$ ist orthogonal, wenn $AA^t = Id$, wobei Id die Einheitsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, und A^t die transponierte Matrix zu A ist.

Lemma 1. *$A \in Mat(n, n)$ ist genau dann orthogonal, wenn das Standard-Skalarprodukt der $i-$ten Zeile mit der $j-$ten Zeile gegeben ist durch* $\begin{cases} 1, & falls\ i = j \\ 0, & falls\ i \neq j \end{cases}$.

Wir werden benutzen: *Eine $(n \times n)$-Matrix ist genau dann gleich Id, falls deren (i, j)-Element gleich* $\begin{cases} 1, & falls\ i = j \\ 0, & falls\ i \neq j \end{cases}$.

Beweis des Lemmas. Sei $A = (a_{ij})$. $AA^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Nach der Rechenregel für das Produkt von Matrizen ist das (i, j)-Element von AA^t gleich $\sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk}$; das ist genau das Standard-Skalarprodukt der $i-$ten Zeile von A mit der $j-$ten Spalte von A^t, die gleich der $j-$ten Zeile von A ist. Also ist AA^t genau dann gleich Id, wenn das Standard-Skalarprodukt der $i-$ten Zeile mit der $j-$ten Zeile gleich $\begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases}$ ist. □

Lemma 2. *Sind $A, B \in Mat(n,n)$ orthogonal, so sind A^t, A^{-1}, AB, auch orthogonal.*

Beweis. Die Bedingung $AA^t = Id$ bedeutet, dass A^t die inverse Matrix zu A ist. Dann ist auch $A^tA = Id$ was gleichbedeutend ist mit $A^t(A^t)^t = Id$; daraus folgt, dass A^t auch orthogonal ist (weil das Produkt dieser Matrix mit ihrer Transponierten die Einheitsmatrix ergibt). Wir müssen noch zeigen, dass AB orthogonal ist und rechnen es aus:

$$AB(AB)^t \overset{(*)}{=} AB(B^tA^t) \overset{(**)}{=} A\ Id\ A^t \overset{(***)}{=} AA^t \overset{(****)}{=} Id.$$

$(*)$ weil $(AB)^t = B^tA^t$.

$(**)$ weil Produkt von Matrizen assoziativ ist, und deswegen $AB(B^tA^t) = A(BB^t)A^t$. Da die Matrix B orthogonal ist, ist $BB^t = Id$.

$(***)$ weil $A\ Id\ A^t = A\ (\ Id\ A^t) = AA^t$.

$(****)$ Weil A orthogonal ist.

Bedeutung von $AA^t = Id$: alternative äquivalente Version

Lemma 2. *Ist $AinMat(n, n)$ orthogonal, so ist auch A^t orthogonal.*

Folgerung. *$A \in Mat(n, n)$ ist genau dann orthogonal, wenn das Standard-Skalarprodukt der $i-$ten Spalte mit der $j-$ten Spalte gegeben ist durch* $\begin{cases} 1, & falls\ i = j \\ 0, & falls\ i \neq j \end{cases}$.

(Unterschied mit Lemma 1: "Zeile" wurde mit "Spalte" ersetzt)

Beispiele: Welche der folgenden Matrizen sind orthogonal?

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

$$S(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix},$$

$$F(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Weitere Folgerung für orthogonale Matrizen:

Lemma 3. *Die Determinante einer orthogonalen Matrix ist* ± 1

Beweis. $det(AA^t) \overset{\text{weil orthogonal}}{=} det(Id) = 1$. Aber $det(AA^t) \overset{\text{Det vom Produkt ist Produkt von Det}}{=} det(A)det(A^t) \overset{det(A) = det(A^t)}{=} det(A)^2$. Also, $det(A)^2 = 1$, und deswegen $det(A) = \pm 1$. $\square$

Klassifikation von 2×2-orthogonalen Matrizen.

Lemma 4. Es gilt:

(a) Jede $2 \times 2-$Orthogonalmatrix A mit $det(A) = 1$ hat das Aussehen $D(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$, wobei $\alpha \in [0, 2\pi[$. Ist $\sin(\alpha) \neq 0$, so hat die Matrix keine Eigenvektoren.

(b) Jede $2 \times 2-$Orthogonalmatrix A mit $det(A) = -1$ hat das Aussehen $S(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$, wobei $\alpha \in [0, 2\pi[$.

Diese Matrix hat die Eigenwerte 1 und -1.

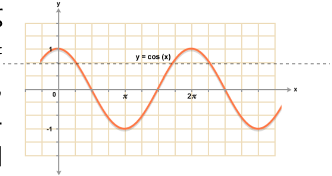
Beweis. Wir benutzen das Lemma 1:

> **Lemma 1.** *$A \in Mat(n, n)$ ist genau dann orthogonal, wenn das Standard-Skalarprodukt der $i-$ten Zeile mit der $j-$ten Zeile gegeben ist durch* $\begin{cases} 1, & falls\ i = j \\ 0, & falls\ i \neq j \end{cases}$.

Wenn $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ orthogonal ist, muss $a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1$ sein. Dann ist $|a_{11}| \leq 1$ und deswegen existiert (genau) ein $\alpha \in [0, \pi]$ mit $\cos(\alpha) = a_{11}$.

Wenn $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ orthogonal ist, muss $a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1$ sein. Dann ist $|a_{11}| \leq 1$ und deswegen existiert (genau) ein $\alpha \in [0, \pi]$ mit $\cos(\alpha) = a_{11}$.

Wir benutzen den Zwischenwertsatz: die Funktion cos ist stetig und erfüllt $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi) = -1$. Dann, wenn wir α von 0 bis π, variieren, nimmt die Funktion alle Werte zwischen $1 = \cos(0)$ und $-1 = \cos(\pi)$ an.



Dann existiert, für jedes a_{11} mit $|a_{11}| < 1$, ein $\alpha \in [0, \pi]$ s.d. $\cos(\alpha) = a_{11}$. Da cos auf $[0, \alpha]$ monoton ist, ist dieses α eindeutig.

Dann muss $a_{12}^2 = \sin(\alpha)^2$ sein, da $a_{11}^2 = \cos(\alpha)^2$ und $\underbrace{a_{11}^2}_{\cos(\alpha)^2} + a_{12}^2 = 1$.

Dann gilt:
$a_{12} = \sin(\alpha) \quad$ oder $a_{12} = -\sin(\alpha)$. Im ersten Fall ersetzen wir $\alpha \longrightarrow -\alpha$; dann haben wir $\cos(\alpha) = a_{11}$ und $-\sin(\alpha) = a_{12}$. Für ein $\alpha \in [-\pi, \pi]$ gilt also $\cos(\alpha) = a_{11}$ und $-\sin(\alpha) = a_{12}$.
Analog folgt, dass ein $\beta \in [-\pi, \pi]$ existiert, mit $a_{21} = \sin(\beta)$ und $a_{22} = \cos(\beta)$.

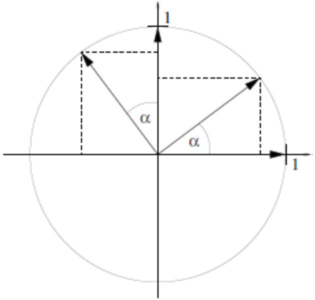
Dann nehmen wir die Bedingung

> **Aus Lemma 1.** Standard-Skalarprodukt der 1-ten Zeile mit der 2-ten Zeile gleich 0.

Da $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$, gibt uns diese Bedingung die Gleichung
$0 = \cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta) \overset{\text{trig. Formeln}}{=} \sin(\beta - \alpha)$. Dann ist $\beta - \alpha = k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
Wenn k eine gerade Zahl ist, ist $\sin(\beta) = \sin(\alpha)$ und $\cos(\beta) = \cos(\alpha)$; also ist die Matrix $A = D(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.
Wenn k eine ungerade Zahl ist, ist $\sin(\beta) = -\sin(\alpha)$ und $\cos(\beta) = -\cos(\alpha)$; also ist die Matrix
$A = S(-\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$. $\square$

Orthogonale Matrix mit det = 1 entspricht einer Drehung

Wir betrachten die Matrix $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ aus Fall (a) von Lemma 4.
Diese Matrix entspricht der Drehung (mit Winkel α) um den 0−Punkt des Koordinatensystems:
In der Tat, die Multiplikation mit der Matrix A dreht die Basisvektoren (und deswegen auch alle Vektoren; wir werden aber für alle Vektoren separat zeigen) um den Winkel α:



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

(Drehungen werden dabei gegen den Uhrzeigersinn durchgeführt.)

Multiplizieren von Dreh-Matrix mit einem beliebigen Vektor der Länge 1

Wir betrachten einen Vektor $\begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}$ der Länge 1 (dass man jeden Vektor der Länge 1 in dieser Form darstellen können haben wir bereit im Beweis von Lemma 4 gesehen).
Wir multiplizieren jetzt:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\phi - \sin\alpha\sin\phi \\ \sin\alpha\cos\phi + \cos\alpha\sin\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\phi) \\ \sin(\alpha+\phi) \end{pmatrix}$$

Bemerkung. Wir haben oben trigonometrische Formeln benutzt. Ich werde später kommentieren, warum wir sie benutzen dürfen.

Eigenvektoren von orthogonalen 2×2-Matrizen

Definition von Eigenvektoren sollen Sie von der Vorlesung Lineare Algebra kennen, ich wiederhole sie.

Def. Sei A eine $n \times n$ Matrix und $v \in \mathbb{R}^n$; $v \neq 0$. Der Vektor v heisst Eigenvektor, falls

$$Av = \lambda v.$$

Die Zahl λ heisst Eigenwert.

Methode, die Eigenvektoren und Eigenwerte einer Matrix A zu berechnen

In LA haben Sie auch die Methoden gelehrt, die Eigenvektoren und Eigenwerte einer Matrix A zu berechnen. ich wiederhole sie für $n = 2$:

- Zuerst berechnen wir Eigenwerte: es ist bekannt (und in LA bewiesen), dass die Eigenwerte die Nullstellen des charakteristisches Polynoms χ_A sind:

$$\chi_A(t) = \det(A - t\,\mathrm{Id}) \overset{\text{in dim 2}}{=} \det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - t \end{pmatrix}.$$

Also, um Eigenwerte einer 2×2-Matrix zu berechnen soll man die quadratische Gleichung

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - t \end{pmatrix} = 0 \ \left(\iff t^2 - \underbrace{(a_{11} + a_{22})}_{\mathrm{trace}(A)}\, t + \underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}_{\det(A)}\right)$$

lösen.

- Wenn die Eigenwerte gefunden sind, soll man für jeden Eigenwert das linearen Gleichungssystem $Av = \lambda v$ auf unbekannte Komponenten von v lösen.

Orthogonale Matrix mit det $= 1$ hat nur dann reellen Eigenvektoren, wenn $\sin(\alpha) = 0$

Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ berechnen wir das characteristisches Polynom:

$$\chi_A(t) = \det(A - tId) = \det \begin{pmatrix} \cos(\alpha) - t & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - t \end{pmatrix} = t^2 - 2\cos(\alpha)t + 1.$$

Die Gleichung $\chi_A(t) = 0$ ist eine quadratische Gleichung, die Discriminante ist $\mathcal{D} = \cos(\alpha)^2 - 1 = -\sin(\alpha)^2$ und ist negative g.d.w. $\sin(\alpha) \neq 0$. In diesem Fall gibt es keinen (reellen) Eigenwert und deswegen keinen Eigenvektor.

Nun betrachten wir den Fall $\sin(\alpha) = 0$. In diesem Fall ist die Matrix A gleich Id (wenn auch $\cos\alpha) = 1$ ist) oder $-Id$ (wenn $\cos\alpha) = -1$). Sie hat deswegen Eigenvektoren: für $A = Id$ ist jeder Vektor $v \neq \vec{0}$ ein Eigenvektor mit Eigenwert 1. Für $A = -Id$ ist jeder Vektor $v \neq \vec{0}$ ein Eigenvektor mit Eigenwert -1.

Eigenvektoren von orthogonalen 2×2-Matrizen mit $\det = -1$

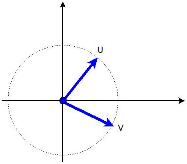
Wir wiederholen die Übung, jetzt mit der Matrix $A\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$.

$$\det(A - tId) = \det \begin{pmatrix} \cos\alpha - t & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha - t \end{pmatrix} = t^2 - (\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2) = t^2 - 1.$$

Die Nullstellen sind $t = \pm 1$.
Um die Eigenvektoren zu finden, müssen wir die entsprechenden Gleichungssystemen lösen; ich habe es für Sie gemacht.
Der Eigenvektor zu 1 ist $u := \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) \end{pmatrix}$. In der Tat,

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\sin(\alpha/2) + \sin(\alpha)\sin(\alpha/2) \\ \sin(\alpha)\cos(\alpha/2) - \cos(\alpha)\sin(\alpha/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) \end{pmatrix}.$$

Der Eigenvektor zu -1 ist $v := \begin{pmatrix} \sin(\alpha/2) \\ -\cos(\alpha/2) \end{pmatrix}$



Man merke: die Eigenvektoren $u := \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) \end{pmatrix}$ und $v := \begin{pmatrix} \sin(\alpha/2) \\ -\cos(\alpha/2) \end{pmatrix}$ sind zueinander orthogonal und haben die Länge 1; deswegen bilden sie eine orthonormale Basis.

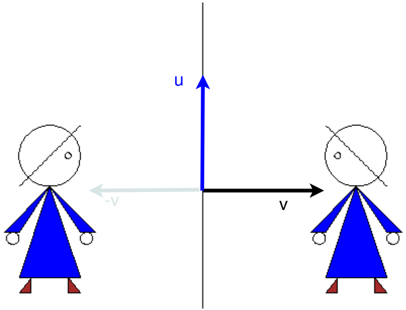
Orthogonale Matrix mit det $= -1$ entspricht einer Spiegelung

Also, wir haben zwei Eigenvektoren (für $\alpha \neq 2\pi k$ sie sind):

$u = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) \end{pmatrix}$ (zum Eigenwert 1)

und $v = \begin{pmatrix} \sin(\alpha/2) \\ -\cos(\alpha/2) \end{pmatrix}$ (zum Eigenwert -1).

Man bemerke, dass u zu v orthogonal ist und Länge 1 haben; deswegen bilden sie einen orthonormalen Basis. In dieser Basis is die Matrix der Abbildung gleich $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, und die Abbildung ist die Spiegelung bzgl. der Geraden mit dem Richtungsvektor u



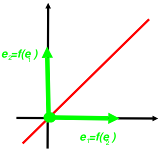
Bemerkung. Es ist einfach zu verstehen, ob eine gegebene orthogonale $(2 \times 2)-$Matrix einer Drehung oder der Verkettung einer Drehung mit einer Spiegelung entspricht.

In der Tat (wie oben einmal berechnet wurde),
det $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1.$

det $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} = -1.$

Also, wenn $det(A) = 1$ (wobei A eine $2 \times 2-$orthogonale Matrix ist), dann ist A die Matrix einer Drehung; wenn $det(A) = -1$, dann entspricht A einer Spiegelung.

Bsp. Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist orthogonal; $\det(A) = -1$. Dann muss sie die Matrix einer Spiegelung sein: Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist die Matrix der Spiegelung bzgl. der Geraden auf dem Bild.



Folgerung. Verkettung von zwei Spiegelungen ist eine Drehung.

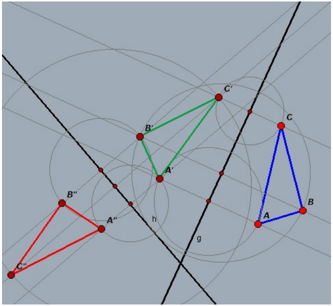


Bild aus Wikipedia

Beweis. Die Multiplikation von zwei orthogonalen Matrizen ist orthogonal; die Determinante davon ist
(det der ersten Matrix)·(det der zweiten Matrix)$= (-1) \cdot (-1) = 1$ □

Zusammenfassung

- Wir haben die Definition und einfachste Eigenschaften von orthogonalen Matrizen wiederholt
- Wir haben orthogonale Matrizen in Dimension 2 vollständig beschrieben.