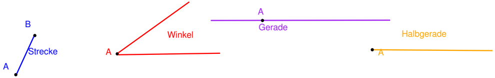
Plan: Geometrische Objekten

- Alle Objekten aus der Geomertie — Gerade, Strecke, Halbgerade, Winkel, Kreis — sind für uns Teilmengen von $\mathbb{R}^2$.
- Wir werden sie definieren (Definitionen sind eigentlich natürlich).
- Eine von Fragen, die wir beantworten bzw. untersuchen werden, ist wie folgt:

  um geometrischen Objekten zu definieren brauchen brauchen wir Konstruktionsdaten, etwa zwei (End)Punkten für eine Strecke. Die Strecke ist aber eine Punktmenge und die Punktmenge hat eigentlich keine ausgewählten Punkten. Bestimmt die Punktmenge "Strecke" ihre Endpunkte eindeutig? Antwort ist Ja und wird bewiesen.
- Ähnliche Fragen für die anderen Objekten werden kurz diskutiert.

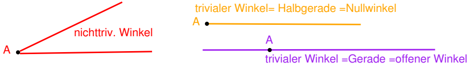
Gerade, Strecke, Halbgerade, Winkel (in $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$)



- Gerade ist Punktmenge $L_{A,v} := \{A + t \cdot v \mid t \in \mathbb{R}\}$, wobei $v \neq \vec{0}$.
- Halbgerade (Strahl) ist Punktmenge $H_{A,v} := \{A + t \cdot v \mid t \in \mathbb{R},\ t \geq 0\}$, wobei $v \neq \vec{0}$; in dem Fall heißt der Punkt A der Endpunkt.
- Strecke mit Endpunkten A, B ist Punktmenge $AB := \{A(1-t) + t \cdot B \mid t \in \mathbb{R},\ 1 \geq t \geq 0\}$. Strecke ist trivial, wenn $A = B$.
- Winkel $\langle vAu$ ist Vereinigung von zwei Halbgeraden mit gleichem Endpunkt A und mit Richtungsvektoren u und v,

  $$\{A+t\cdot v \mid t \in \mathbb{R},\ t \geq 0\} \cup \{A+t\cdot u \mid t \in \mathbb{R},\ t \geq 0\}, \text{ wobei } v \neq \vec{0} \text{ und } u \neq \vec{0}$$

  Winkel ist trivial, wenn er eine Gerade oder eine Halbgerade ist; also wenn u proportional zu v ist. Winkel ist Nullwinkel, wenn $u = \lambda v$ mit $\lambda > 0$, und ein offener Winkel, wenn $u = \lambda v$ mit $\lambda < 0$,



Mehr für die Formel für die Strecke

Wir haben die Strecke mit Endpunkten A, B als Punktmenge $AB := \{A(1-t) + t \cdot B \mid t \in \mathbb{R},\ 1 \geq t \geq 0\}$ definiert. In der Schule haben wir Strecke als Teil einer Geraden, die von zwei Punkten begrenzt wird, definiert.

Das Wort "begrenzt" greife ich noch nicht an; ich möchte "Teil einer Geraden" besprechen. Warum liegen aller Punkten der Strecke AB auf einer Geraden? (Wir nehmen an, dass $A \neq B$ ist, weil der Fall $A = B$ trivial ist).

Wir betrachten die Gerade $L_{A,\vec{AB}} = \{A + t \cdot \vec{AB} \ \mid\ t \in \mathbb{R}\}$. Wir zeigen, dass die Menge $AB := \{A(1-t) + t \cdot B \mid t \in \mathbb{R},\ 1 \geq t \geq 0\}$ eine Teilmenge der Gerade ist. Dazu formen wir die blaue Formel in der Definition von AB equivalent um:

$$A(1-t) + t \cdot B = A + t(B - A) = A + t\vec{AB}$$

(wir erinnern uns, dass $A, B \in \mathbb{R}^n$ also die Addition/Multiplikation mit Skalaren erfüllt die üblichen Regeln). Also, die Strecke AB ist die Menge

$$AB := \{A + t\vec{AB} \mid t \in \mathbb{R},\ 1 \geq t \geq 0\}$$

und ist eine Teilmenge der Geraden $L_{A,\vec{AB}} = \{A + t\vec{AB} \ \mid\ t \in \mathbb{R}\}$.

Wie eindeutig bestimmen diese Punktmengen die Daten, die wir benutzt haben um sie zu konstruieren?

Nach unserer Definition sind Gerade, Strecke, Halbgerade, Winkel (als mathematische Objekte) Punktmengen; um sie zu konstruieren, wählen wir "Konstruktionsdaten", also etwa die Punkte A, B und Vektoren $u, v \neq \vec{0}$.

Frage: Inwiefern bestimmen unsere Punktmengen die "Konstruktionsdaten"? Wann sind 2 Punktmengen mit verschiedenen "Konstruktionsdaten" gleich als Punktmengen, also wann fallen sie zusammen?

Bsp.

Die Geraden $L_{A,v} = \{A + t \cdot v \mid |t \in \mathbb{R}\}$ und
$L_{A+v,2v} = \{\underbrace{A + v}_{A'} + t \cdot \underbrace{2v}_{v'} \mid t \in \mathbb{R}\}$ fallen zusammen:

Jeder Punkt von $L_{A+v,2v}$ ist auch ein Punkt von
$L_{A,v} = \{A + t \cdot v \mid |t \in \mathbb{R}\}$, weil jeder Punkt der Form
$\underbrace{A + v}_{A'} + t' \cdot \underbrace{2v}_{v'}$ gleich $A + \tilde{t} v$ ist, für $\tilde{t} = (2t' + 1)$ (weil
$A + (2t' + 1)v = A + v + t' \cdot (2v)$) und damit auf Gerade $L_{A,v}$
liegt. Folglich gilt $L_{A,v} \supseteq L_{A+v,2v}$.

Analog zeigt man, dass $L_{A,v} \subseteq L_{A+v,2v}$: jeder Punkt der Form
$A + t \cdot v$ ist auch ein Punkt von $L_{A+v,2v}$, weil
$A + t \cdot v = A + v + \underbrace{\left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\right)}_{t'} \cdot \underbrace{(2v)}_{v'}$. Also, $L_{A,v} = L_{A+v,2v}$.

Lemma 6. Die Strecken AB und $A'B'$ sind genau dann gleich, wenn die Mengen der Endpunkte gleich sind: $\{A, B\} = \{A', B'\}$.

Obwohl die Aussage geometrisch trivial aussieht, ist es nicht so trivial sie zu beweisen; die Hauptschwierigkeit liegt darin zu verstehen, was man eigentlich beweisen soll.

Die Richtung $\Longleftarrow$ ist jedoch einfach: wir müssen zeigen, dass $AB = BA$ ist:

$$\boxed{AB := \{A(1-t) + t \cdot B \mid t \in \mathbb{R},\ 1 \geq t \geq 0\} \quad BA := \{B(1-t') + t' \cdot A \mid t' \in \mathbb{R},\ 1 \geq t' \geq 0\}.}$$

Das ist der Fall, weil jeder Punkt der Form $A(1-t) + t \cdot B$ mit $1 \geq t \geq 0$ auch in der Form $B(1-t') + t' \cdot A \mid t'$ mit $1 \geq t' \geq 0$ dargestellt werden kann, und zwar für $t' = 1 - t$ (dieses t' erfüllt auch die Bedingung $1 \geq t' \geq 0$). Also, $AB \subseteq BA$; analog zeigt man, dass $AB \supseteq BA$.

Beweis von Lemma 6 in “$\Longrightarrow$” Richtung.

Lemma 6. Die Strecken AB und $A'B'$ sind genau dann gleich, wenn die Mengen der Endpunkte gleich sind: $\{A, B\} = \{A', B'\}$.

Um dies zu beweisen, zeigen wir die “metrische Bedeutung” der Endpunkte einer Strecke.
Die folgende Aussage zeigt, dass man für jede Strecke die Endpunkte nur mit geometrischen Mitteln bestimmen kann:

Aussage. Für eine Strecke AB existiert genau ein nicht geordnetes Paar von Punkten $X, Y \in AB$, so dass

$$\forall X', Y' \in AB \text{ gilt } d(X', Y') \leq d(X, Y),$$

und zwar $(X, Y) = (A, B)$.

Aussage. Für eine Strecke AB existiert genau ein nicht geordnetes Paar von Punkten $X, Y \in AB$, so dass

$$\forall X', Y' \in AB \text{ gilt } d(X', Y') \leq d(X, Y),$$

und zwar $(X, Y) = (A, B)$.

Beweis der Aussage: Wenn die Strecke trivial ist, also wenn $A = B$ ist, dann ist nichts zu beweisen: das einzige Paar von Punkten von AB ist (A, A). Angenommen, $A \neq B$. Sei $X' = tA + (1-t)B$ und $Y' = \tau A + (1-\tau)B$ (wobei $0 \leq t \leq 1$ und $0 \leq \tau \leq 1$). Dann gilt:

$$d(X', Y') = d(tA + (1-t)B, \tau A + (1-\tau)B) = \mid tA + (1-t)B - (\tau A + (1-\tau)B) \mid$$

$$= \mid (t-\tau)(A-B) \mid = |t-\tau| \cdot |A-B|.$$

Da $0 \leq t \leq 1$ und $0 \leq \tau \leq 1$, gilt $|t-\tau| \leq 1$; also $d(X', Y') \leq d(A, B)$. Ferner gilt: $|t-\tau| = 1$, genau dann wenn $(t\ , \tau) = (1, 0)$ oder $(t\ , \tau) = (0, 1)$, also genau dann wenn $\{X', Y'\} = \{A, B\}$.

Wir sehen, dass die Endpunkte einer Strecke die beiden am weitesten voneinander entfernten Punkte der Strecke sind. Wenn zwei Strecken zusammenfallen, fallen auch die zweielementigen Endpunktmengen zusammen

Beweis von Lemma 6 in "$\Longrightarrow$" Richtung.

Lemma 6. Die Strecken AB und $A'B'$ sind genau dann gleich, wenn die Mengen der Endpunkte gleich sind: $\{A, B\} = \{A', B'\}$.
Aussage. Für eine Strecke AB existiert genau ein nicht geordnetes Paar von Punkten $X, Y \in AB$, so dass

$$\forall X', Y' \in AB \text{ gilt } d(X', Y') \leq d(X, Y),$$

und zwar $(X, Y) = (A, B)$.

Die Aussage besagt, dass man die Endpunkte einer Strecke definieren kann, ohne die Konstruktiondaten der Strecke zu benutzen:
Wenn zwei Strecken AB und $\tilde{A}\tilde{B}$ gleich (als Mengen) sind, dann sind auch die entsprechenden nicht geordneten Paare (X, Y) und $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ gleich;da $(X, Y) = (A, B)$ und $(\tilde{X}, \tilde{Y}) = (\tilde{A}, \tilde{B})$ folgt daraus, dass $(A, B) = (\tilde{A}, \tilde{B})$, $\square$.

Bemerkung. Im Beweis haben wir die Abstandsfunktion benutzt. Wir zeigen später, im Abschnitt "Konvexe Geometrie", dass man dieselbe Aussage nur unter Benutzung der Struktur des linearen Vektorraums erhält.

Frage

Wie eindeutig bestimmen diese Punktmengen die Daten, die wir benutzt haben um Sie zu konstruieren?

Gerade	Punkt + Vektor $\neq \vec{0}$	bis auf $(x, v) \mapsto (x + \lambda v, \mu v)$ mit $\mu \neq 0$
Halbgerade	Punkt + Vektor $\neq \vec{0}$	bis auf $v \mapsto \mu v$ mit $\mu > 0$
Strecke	2 Punkte	eindeutig; Lemma 6
Winkel	Punkt + zwei Vektoren $\neq 0$	Wenn Winkel nichttrivial ist, dann $(u, v) \mapsto (\lambda u, \mu v)$ für $\lambda > 0$, $\mu > 0$ und $(u, v) \mapsto (\mu v, \lambda u)$ für $\lambda > 0$, $\mu > 0$.

Trivialer Winkel mit $u = \lambda v$ (für $\lambda > 0$) ist eine Halbgerade; in dem Fall bestimmt er auch die Konstruktionsdaten A, u, v mit der Freiheit $(u, v) \mapsto (\lambda u, \mu v)$ für $\lambda > 0$, $\mu > 0$.
Trivialer Winkel mit $u = \lambda v$ mit $\lambda < 0$ ist eine Gerade; in dem Fall bestimmt er die Konstruktionsdaten A, u, v mit der Freiheit $(A, u, v) \mapsto (A + \xi u, \lambda u, \mu v)$ für $\xi \in \mathbb{R}, \lambda \cdot \mu > 0$.

Zusammenfassung

- Geometrische Objekte für uns sind, als mathematische Objekte, Teilmengen von $\mathbb{R}^2$. Z.B. eine Strecke ist die Teilmenge der Form

$$AB := \{A(1-t) + t \cdot B \mid t \in \mathbb{R},\ 1 \geq t \geq 0\}$$

- Diese Teilmengen sind oft mit Hilfe von "Konstruktionsdatren" gegeben (in der Formel oben sind die Konstruktionsdaten die Punkten A, B. Wir haben beschprochen, wie die Teilmenge die Konstruktionsdaten bestimmt.