Plan: Winkelmaß und Anwendungen

- Die Frage steht oben – wie misst man die Winkel?
- Wir definieren Winkelmaß. In der Vorlesung2c besprechen/beweisen wir Wohldefiniertheit.

Der Winkel/ das Winkelmaß (die Winkelweite)

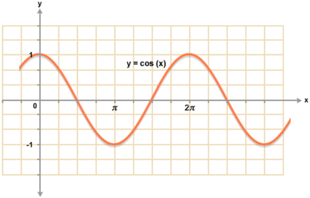
Def. *Wir betrachten einen Winkel* $\langle uAv$. *Die Zahl* $\arccos\left(\frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|}\right) \in [0,\pi]$ *heißt das Winkelmaß von Winkel zwischen* u *und* v.

Bemerkung *Um zu zeigen, dass das Winkelmaß zwischen* u *und* v *wohldefiniert ist, müssen wir zeigen, dass die Zahl* $\arccos\left(\frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|}\right)$ *definiert ist; also dass*

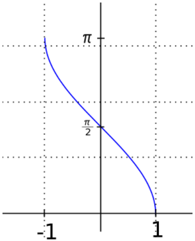
$$-1 \leq \frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|} \leq 1;$$

das werden wir jetzt zeigen mit der Hilfe von Cauchy-Schwarz-Ungleichung aus LA; wir werden die Ungleichung wiederholen und beweisen. Außerdem müssen wir zeigen, dass die Zahl $\arccos\left(\frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|}\right)$ *nicht von unserer Freiheit in Wahl von Richtungsvektoren* u *und* v *abhängt: warum bekommen wir die gleichen Ergebnisse wenn wir* u *und* v *mit positiven* λ *und* μ *multiplizieren.*

Um den Winkel zu definieren, benutzen wir die Funktion cos. In der Schule haben wir aber cos mit Hilfe eines Winkels definiert; wenn wir also die Schuldefinition zugrunde legen, befinden wir uns in einer logischen Schleife.



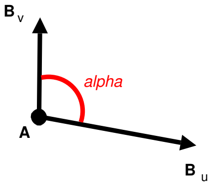
In der Analysis-Vorlesung werden die Funktionen cos und sin rein analytisch, also ohne Bezug zur Schulgeometrie eingeführt, und zwar als Grenzwerte der unendlichen Summe $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots$; $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \ldots$.



Die Eigenschaften der Funktionen Sinus und Kosinus, die Ihnen noch aus der Schule bekannt sind und die eigentlich notwendig zur Definition der Funktion arccos sind (z.B. Definitionsbereich, siehe das Bild) hat man ebenfalls sauber, nur anhand dieser analytischen Formeln bewiesen.

Bemerkung *In der Ebene/im Raum ist der Winkel im Sinne der obigen Definition der übliche Winkel*

Wiederholung – Schulgeometrie: In der Ebene/im Raum ist $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(alpha)$. Also ist $\cos(alpha) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{u}||\vec{v}|}$.



Bemerkung. Man kann die Schuldefinition $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(alpha)$ als Definition von Skalarprodukt nehmen (das ist "legal", ich habe diese Definition etwa in meiner Vorlesung Elementare Geometrie für Lehramt-Regelschule benutzt).
Wenn man diese Definition annimmt, ist es nichttrivial zu zeigen, dass Skalarprodukt bilinear ist, also dass $\langle \lambda \vec{u} + \lambda' \vec{u}', \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \lambda' \langle \vec{u}', \vec{v} \rangle$.

Beispiel:

Im $\mathbb{R}^2$ mit Standardskalarprodukt berechne man den Winkel zwischen den Vektoren
$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung. $\cos(\alpha) = \dfrac{\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}{\sqrt{\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \cdot \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}} = \dfrac{2}{\sqrt{4 \cdot 2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Dann ist $\alpha = \arccos(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 45^\circ$.

Rechnen Sie bitte selbst:

Im $\mathbb{R}^2$ mit Standardskalarprodukt berechne man den Winkel zwischen den Vektoren
$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Lösung. $\cos(\alpha) = \frac{\langle \binom{3}{4}, \binom{-4}{3} \rangle}{|u| \cdot |v|} = \frac{-3 \cdot 4 + 4 \cdot 3}{|u| \cdot |v|} = \frac{0}{|u| \cdot |v|} = 0.$
Dann ist $\alpha = \arccos(0) = 90^\circ$.

Bemerkung/Definition. Die Vektoren sind genau dann orthogonal (d.h., ihr Skalarprodukt ist g.d. gleich 0), wenn der Winkel zwischen den Vektoren gleich 90° ist.

Zusammenfassung

- Wir haben Winkelmaß durch algebraischen Formel $\arccos\left(\frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|}\right) \in [0,\pi]$ definiert.
  - Vorteil: Winkelmaß ändert sich nicht, wenn wir Winkel mittels einer Isometrie bewegen; also ist eine geometrische Grosse.
    - Da wir, um das Winkelmaß zu definieren, nur das Skalarprodukt benutzt haben, und Isometrien das Skalarprodukt erhalten (Folg. 3 aus Satz 1), erhalten Isometrien auch das Winkelmaß.
  - Nachteil: Wir wissen noch nicht, ob Winkelmaß definiert und wohldefiniert ist:
    - Eventuell, liegt die Zahl $\left(\frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|}\right)$ außerhalb der Definitionsbereich der Funktion arccos
    - Eventuell, ist die arccos $\left(\frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|}\right)$ für verschiedene Vektoren u, v, welche den gleichen Winkel etsprechen, verschieden
- Wir werden in Vorlesung 2c diese Probleme besprechen.