Plan

- Auf dem Weg wiederholen wir und beweisen die Cauchy-Schwarz Ungleichung aus Lineare Algebra.
- Außerdem werden die Anwendungen besprochen wie z.B. Dreiecksungleichung, Parallelogrammgleichung, Cosinussatz.

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Lemma 7 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung; Lineare Algebra)
$|\langle u,v\rangle| \le |u|\,|v|$ (für alle $u, v \in \mathbb{R}^n$). Ferner gilt: $\langle u,v\rangle = |u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren proportional sind mit nicht-negativem Koeffizienten und $\langle u,v\rangle = -|u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren proportional sind mit nicht-positivem Koeffizienten.

Beweis. Ist $v = \vec{0}$, so sind beide Seiten gleich Null. Sei $v \neq \vec{0}$. Sind die Vektoren linear abhängig, so ist $u = \lambda v$, und $\langle u,v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda \cdot |v|^2 = \pm|\lambda v| \cdot |v|$ wobei das Vorzeichen wie oben formuliert ist.

Angenommen, die Vektoren sind linear unabhängig. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle u+tv, u+tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle u, u+tv\rangle + t\langle v, u+tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle u,u\rangle + \underbrace{t\langle u,v\rangle + t\langle v,u\rangle}_{2t\langle u,v\rangle \text{ wegen Symmetrie}} + t^2\langle v,v\rangle = \underbrace{|u|^2}_{c} + \underbrace{2\langle u,v\rangle}_{b}\, t + t^2 \underbrace{|v|^2}_{a}.$$

Dies ist ein quadratisches Polynom in t. Es hat keine Nullstelle, da $\langle u+tv, u+tv\rangle$ gleich Null ist, genau dann wenn $u = -tv$, also falls u, v linear abhängig sind, was wir oben explizit ausgeschlossen haben. Da das Polynom keine Nullstelle hat, ist die Diskriminante negativ, also

$$\mathcal{D} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = \langle u,v\rangle^2 - |v|^2|u|^2 < 0. \quad \text{Dann ist } |\langle u,v\rangle| < |v||u|. \quad \square$$

- In dem Beweis haben wir die Formel für die Nullstellen eines quadratischen Polynoms $at^2 + bt + c$ (mit $a \neq 0$) benutzt:

$$t_\pm = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\mathcal{D}}}{a} \qquad (*)$$

  (wobei $\mathcal{D} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$)
- Nämlich, haben wir benutzt, dass es genau dann reelle Nullstelle gibt, wenn $\mathcal{D} \geq 0$ (und genau dann zwei reellen Nulstellen, wenn $\mathcal{D} > 0$).
- Obwohl die Formel $(*)$ aus der Schule bekannt ist (und auch der Beweis in der Schule gegeben werden soll), wiederhole ich ihn.

- Zuerst forme ich die Gleichung um:

$$at^2+bt+c \;=\; a\left(t^2+\frac{b}{a}t+\frac{c}{a}\right)=a\left(t^2+\frac{b}{a}t+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)$$
$$a\left(\left(t+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)\right)$$

  Dabei habe ich die binomsche Formel benutzt:
  $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ für $x=t$ und $y=\frac{b}{2a}$.
- Die Gleichung $at^2+bt+c=0$ ist deswegen äquivalent zur Gleichung

$$\left(t+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)=0.$$

Wir sehen, dass wenn $\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}<0$ (was $\iff$ zur $\mathcal{D}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac<0$), dann ist die Gleichung nicht lösbar (in $\mathbb{R}$).
Wenn $\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\geq 0$, ist $\left(t+\frac{b}{2a}\right)=\pm\frac{1}{a}\sqrt{\left(\frac{b^2}{4}-ac\right)}$ was durch einer Umformung zur Formel $(*)$,

$$t_\pm=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\mathcal{D}}}{a} \qquad (*)$$

führt.

Winkelmaß ist wohldefiniert

Wir haben das Winkelmaß von $\langle uAv$ als $\arccos\left(\frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|}\right)$ definiert. Aus Cauchy-Schwarz folgt, dass $-1 \le \frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|} \le 1$ ist, also $\arccos\left(\frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|}\right)$ wohldefiniert ist.

Außerdem müssen wir noch zeigen, dass Winkelmaß nicht von der Transformation $(u, v) \mapsto (\mu v, \lambda u)$ für $\lambda > 0$, $\mu > 0$ abhängt (bzw. von der entsprechenden Transformation für die trivialen Winkel).

Winkel	Punkt + zwei Vektoren$\neq 0$	Wenn Winkel nichttrivial ist, dann $(u, v) \mapsto (\lambda u, \mu v)$ für $\lambda > 0$, $\mu > 0$ und $(u, v) \mapsto (\mu v, \lambda u)$ für $\lambda > 0$, $\mu > 0$.

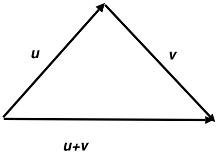
Wenn wir $u' = \lambda u$ und $v' = \lambda v$ setzen (für $\lambda > 0$, $\mu > 0$), bekommen wir

$$\frac{\langle u', v'\rangle}{|u'|\,|v'|} = \frac{\langle \lambda u, \mu v\rangle}{|\lambda u|\,|\mu v|} = \frac{\langle u, v\rangle}{|u|\,|v|}.$$

Für trivialen Winkel analog.
Also, Winkelmaß ist wohldefiniert.

Versprechen aus der Woche 1

Folgerung (Dreiecksungleichung für Vektoren). Für alle $u, v \in \mathbb{R}^n$ gilt: $|u+v| \le |u| + |v|$. Ferner gilt: ist $|u+v| = |u| + |v|$, dann sind die Vektoren proportional, mit einem nichtnegativem Koeffizienten.



Beweis.

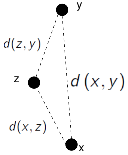
$$(|u+v|)^2 = \langle u+v, u+v\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} |u|^2 + 2\langle u, v\rangle + |v|^2$$

$$(|u| + |v|)^2 = |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2.$$

Da nach Cauchy-Schwarz $\langle u, v\rangle \le |u||v|$, ist $(|u+v|)^2 \le (|u| + |v|)^2$ und deswegen $|u+v| \le |u| + |v|$. $\square$

Bemerkung. Daraus folgt sofort die Dreiecksungleichung für die euklidische Abstandsfunktion:

$\underbrace{d(x,y)}_{|x-y|} \le \underbrace{d(x,z)}_{|x-z|} + \underbrace{d(z,y)}_{|z-y|}$, da $x - y = (x-z) + (z-y)$.



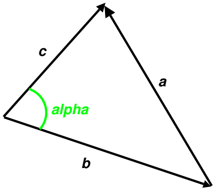
Parallelogrammgleichung: *Für alle $u, v \in V$ gilt:* $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$.

Beweis. $|u+v|^2 + |u-v|^2 = \langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle =$
$\langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle + \langle u,u\rangle - \underbrace{2\langle u,v\rangle}_{=2\langle v,u\rangle} + \langle v,v\rangle =$

$2\big(\langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle\big) = 2(|u|^2 + |v|^2)$. $\square$

Kosinussatz

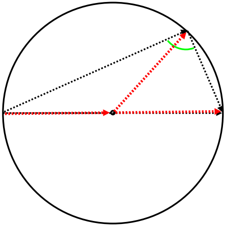
Kosinussatz *Im Dreieck auf dem Bild*

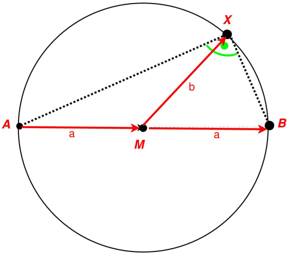


ist $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2|\vec{b}||\vec{c}|\cos(alpha)$.
Beweis: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$, also $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$.
Dann ist $|\vec{a}|^2 = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{c} - \vec{b}, \vec{c} - \vec{b} \rangle = \langle \vec{c}, \vec{c} \rangle - 2\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2|\vec{b}||\vec{c}|\cos(alpha)$. □

Mit Hilfe der Bilinearität des Skalarprodukts kann man mehrere schulgeometrische Aufgaben lösen (Bsp: Thales)

Satz von Thales. *Im Dreieck auf dem Bild* ist das Winkelmaß der Winkel *alpha* gleich 90°.





Beweis.

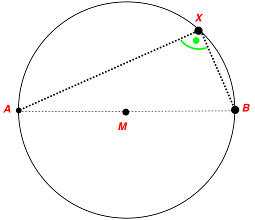
Man betrachte die Vektoren $\vec{a} = \vec{AM} = \vec{MB}, \vec{b} = \vec{MX}$ wie im Bild. Wir zeigen, dass $\langle \underbrace{\vec{a} + \vec{b}}_{\vec{u} = \vec{AX}}, \underbrace{\vec{a} - \vec{b}}_{\vec{v} = \vec{XB}} \rangle = 0$. Wegen Bilinearität und Symmetrie ist

$$\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \underbrace{\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}_{=0,\ \text{Symmetrie}} - \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle =$$

$|a|^2 - |b|^2 = 0$. Dann ist $\arccos\left(\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|u|\,|v|}\right) = \arccos(0) = 90^\circ$. $\square$

Umkehrung des Satzes von Thales

Sei $A \neq B$. Dann gilt: die Menge $\{X \in \mathbb{R}^2 \mid \langle AXB = 90^\circ\}$ ist der Kreis um den Mittelpunkt $M = \frac{1}{2}(A + B)$ von AB vom Radius $\frac{1}{2}|AB|$.



Beweis. Wir setzen $a := M - A$; dann ist $B - M = a$ (weil $M = \frac{1}{2}(A + B)$). Sei $b := X - M$. Dann ist $X - A = a + b$ und $B - X = a - b$. Dann bedeutet die Bedingung $\langle X - A, B - X \rangle = 0$, dass $0 = \langle a + b, a - b \rangle = |a|^2 - |b|^2$. Damit ist $|a| = |b|$ und deswegen $|M - X| = \frac{1}{2}|AB|$; also X liegt auf dem Kreis um M mit Radius $\frac{1}{2}|AB|$, $\square$

Zusammenfassung

Wir haben einige geometrische Objekten definiert – Gerade, Strecke, Winkel. Für Winkel haben wir Winkelmaß definiert. Unsere "agebraische" Definition hat Vor- und Nachteile; wir haben Vorteile benutzt (z.B. Bilinearität des Skalarprodukts) um Cosinussatz und Satz von Thales zu besweisen.