Plan

- Wir beweisen die Gleichheit von Stufen-, Wechsel- und Gegenwinkel
- Wir beweisen, dass die Summe der inneren Winkel jedes Dreiecks gleich 180° ist.

Zuerst Vorarbeit: Richtigkeit von trigonometrischen Formel für $\cos(\alpha+\beta)$

Fakt. $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$.

- Ich habe vor eine Woche eine Beweismethode skizziert: die Funktion $\cos(\alpha+\beta)$ ist als Reihe

$$1 - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2 + \frac{1}{4!}(\alpha+\beta)^4 - \ldots$$

  darstellbar. Man löst die Klammem auf und vergleicht das Ergebnis mit

$$(1-\tfrac{1}{2}\alpha^2+\tfrac{1}{4!}\alpha^4-\ldots)(1-\tfrac{1}{2}\beta^2+\tfrac{1}{4!}\beta^4-\ldots)-(\alpha-\tfrac{1}{3!}\alpha^3+\tfrac{1}{5!}\alpha^5-\ldots)(\beta-\tfrac{1}{3!}\beta^3+\tfrac{1}{5!}\beta^5-\ldots).$$

- Man muss relativ viel rechnen.
- Man kann mit das Rechnen vereinfachen, wenn man zuerst die Richtigkeit der Formel $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ zeigt (auch mir Multiplikation von Reihen; allerdings ist die Rechnerei in diesem Fall viel einfacher), und danach die Formel $e^{x+iy} = \cos(x) + i\sin(y)$ (welche sofort aus der Reihen für e^z folgt).

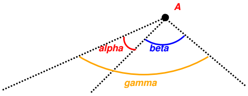
Alternative Methode, mit Hilfe von Differentialgleichungen

- Zuerst bemerken wir, dass die Funktionen der Form $f(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$ (wobei $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$) die einzigen analytischen Funktionen sind, so dass $f'' = -f$.
- Die Funktion $f(x) = \cos(\alpha + x)$ hat die Eigenschaft, dass $f'' = -f$; also muss $\cos(\alpha + \beta) = C_1(\alpha) \cos(\beta) + C_2(\alpha) \sin(\beta)$ (für jedes α haben wir $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$; also C_1, C_2 sind Funktionen von α).
- Wenn wir α und β in $\cos(\alpha + \beta)$ umtauschen, ändern wir nichts; also muss $\cos(\alpha + \beta) = \mathrm{const}_1 \cos(\alpha) \cos(\beta) + \mathrm{const}_2 \sin(\alpha) \sin(\beta)$ für Konstanten $\mathrm{const}_1, \mathrm{const}_2$.
- Wir setzen $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ um zu zeigen, dass $\mathrm{const}_1 = 1$, und $\alpha = \pi/2$ und $\beta = \pi_2$ um zu zeigen, dass $\mathrm{const}_2 = -1$.

Bemerkung. Die Formel $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ folgt sofort aus der Formel $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$: wenn man $\alpha = -\beta$ nimmt, bekommt man:

$$\underbrace{\cos(0)}_{1} = \underbrace{\cos(\alpha) \underbrace{\cos(-\alpha)}_{\cos(\alpha)}}_{\cos(\alpha)^2} - \underbrace{\sin(\alpha) \underbrace{\sin(-\alpha)}_{-\sin(\alpha)}}_{-\sin(\alpha)^2}.$$

Warum ist $\alpha + \beta = \gamma$ (siehe Bild)?



Zuerst skizziere ich die "Brecheisenmethode". Diese Methode wird nicht vollständig vorgetragen; solche Methoden funktionieren aber auch wenn man keine andere bessere Methode gefunden hat. Wir werden mit einer ähnlichen "Brecheisenmethode" auch Sinussatz zeigen. Es genügt zu zeigen, dass $\arccos\left(\frac{\langle u,u+v\rangle}{|u||u+v|}\right) + \arccos\left(\frac{\langle v,u+v\rangle}{|v||u+v|}\right) = \arccos\left(\frac{\langle v,u\rangle}{|v||u|}\right)$.

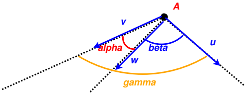
Deswegen genügt es zu zeigen, dass

$$\frac{\langle v,u\rangle}{|v||v|} \stackrel{?}{=} \cos\left(\arccos\left(\frac{\langle u,u+v\rangle}{|u||u+v|}\right) + \arccos\left(\frac{\langle v,u+v\rangle}{|v||u+v|}\right)\right). \qquad (*)$$

Wir benutzen die Formel $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$ für $\alpha = \arccos\left(\frac{\langle u,u+v\rangle}{|u||u+v|}\right)$ und $\beta = \arccos\left(\frac{\langle v,u+v\rangle}{|v||u+v|}\right)$; außerdem benutzen wir $\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$ um $\sin(\alpha)$ zu finden; $\sin(\alpha) = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{\langle u,u+v\rangle}{|u||u+v|}\right)^2}$.

Analog finden wir $\sin(\beta)$. Wir setzen alles in $(*)$ ein und rechnen nach

Warum ist $\alpha + \beta = \gamma$: Beweis unter Benutzung Vorlesungen aus Woche 2



O.B.d.A. haben die Richtungsvektoren u, v und w von Strahlen (Seiten von Winkel) die Länge 1; außerdem können wir eine Isometrie (Translation auf $-A$) anwenden sodass $A = \vec{0}$ ist.

In der Woche 2 haben wir gezeigt, in der Beschreibung von orthogonalen Matrizen, Existenz von $\theta_v, \theta_u, \theta_w$ sodass (siehe auch Vorl3c):

(a) $v = \begin{pmatrix} \cos\theta_v \\ \sin\theta_v \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} \cos\theta_u \\ \sin\theta_u \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} \cos\theta_w \\ \sin\theta_w \end{pmatrix}$.

(b) Außerdem gilt $\forall\ \alpha, \beta\ D_\beta D_\alpha = D_{\beta+\alpha}$.

(c) $\forall \alpha, \theta$ gilt: $D_\alpha \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\theta) \\ \sin(\alpha+\theta). \end{pmatrix}$.

Für $\alpha = \theta_w - \theta_v$, $\beta = \theta_u - \theta_w$ und $\gamma = \theta_u - \theta_v$ haben wir dann

$$D_\alpha v = D_\alpha \begin{pmatrix} \cos\theta_v \\ \sin\theta_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_w \\ \sin\theta_w \end{pmatrix} = w\ , \quad \longleftarrow \quad \text{am 1.11 korrigiert}$$

$$D_\beta w = D_\beta \begin{pmatrix} \cos\theta_w \\ \sin\theta_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_u \\ \sin\theta_u \end{pmatrix} = u\ ,$$

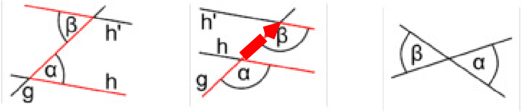
$$D_\gamma v = D_\beta \begin{pmatrix} \cos\theta_u \\ \sin\theta_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_v \\ \sin\theta_v \end{pmatrix} = u\ .$$

Dann gilt: $u = D_\gamma v = D_\beta D_\alpha v = D_\beta w = u$; deswegen gilt:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_v + \alpha + \beta) \\ \sin(\theta_v + \alpha + \beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_v + \gamma) \\ \sin(\theta_v + \gamma) \end{pmatrix}$$

und dann $\alpha + \beta = \gamma + 2\pi k$.

Zuerst besprechen wir, dass die Stufen-, Wechsel- und Gegenwinkel (an parallelen Geraden) gleich sind



Wechsel-, Stufen- und Gegenwinkel

Zuerst definieren wir Begriff “parallele Geraden”:
Wir sagen, dass eine Gerade $L_{A,v} = \{A + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ parallel zur $L_{A',v'} = \{A' + tv' \mid t \in \mathbb{R}\}$, falls sie keine Schnittpunkte haben.

Bemerkung. Es gibt zwei “kanonischen”, aber nichtäquivalenten, Definitionen von parallelen Geraden. Eine benutze ich oben. Zweite Definition wird etwa in der affinen Geometrie benutzt; auch die zusammenfallenden Geraden sind parallel bezüglich der zweiten Definition.

Lemma (Algebraische Charakterisierung von parallelen Geraden). Sind die Geraden $L_{A,v} = \{A + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ und $L_{A',v'} = \{A' + tv' \mid t \in \mathbb{R}\}$ parallel, so sind die Richtungsvektoren proportional: $v = \lambda v'$. Ferner gilt: ist $v = \lambda v'$, so sind die Geraden parallel oder fallen sie zusammen.

Beweis.

Lemma (Algebraische Charakterisierung von parallelen Geraden). Sind die Geraden $L_{A,v} = \{A + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ und $L_{A',v'} = \{A' + tv' \mid t \in \mathbb{R}\}$ parallel, so sind die Richtungsvektoren proportional: $v = \lambda v'$. Ferner gilt: ist $v = \lambda v'$, so sind die Geraden parallel oder fallen sie zusammen.

Die Geraden $L_{A,v}$ und $L_{A',v'}$ habe keine Schnittpunkte. Dann kann man keinen Punkt $A + tv$ erster Geraden in der Form $A' + \tau v'$ darstellen, also hat die Gleichung $A + tv = A' + \tau v'$ keine Lösung.

In dieser Gleichung sind A, v, A', v' bekannt und t, τ unbekannt; wir mussen zeigen, dass aus Nichtexistenz der Lösung folgt Proportionalitättät der Vektoren v, v'. Wir schreiben die Gleichung als lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} v_1 t - \tau v_1' &= A_1' - A_1 \\ v_2 t - \tau v_2' &= A_2' - A_2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} v_1 t - \tau v_1' & = & A_1' - A_1 \\ v_2 t - \tau v_2' & = & A_2' - A_2 \end{array}}$$

Die Koeffizientenmatrix des Systems ist $v := \begin{pmatrix} v_1 & -v_1' \\ v_2 & -v_2' \end{pmatrix}$; in der Matrizenform sieht das System wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} v_1 & -v_1' \\ v_2 & -v_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1' - A_1 \\ A_2' - A_2 \end{pmatrix}.$$

Ist die Matrix nichtausgeartet (d.h., ist Determinante nicht Null), so gibt es (für eine beliebigen rechte Seite $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$; in unserem Fall ist die rechte Seite $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1' - A_1 \\ A_2' - A_2 \end{pmatrix}$) eine (eindeutige) Lösung

$$\begin{pmatrix} t \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & -v_1' \\ v_2 & -v_2' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_1' - A_1 \\ A_2' - A_2 \end{pmatrix}.$$

Also ist die Matrix $\begin{pmatrix} v_1 & -v_1' \\ v_2 & -v_2' \end{pmatrix}$ ausgeartet, dann ist der Rang der Matrix ≤ 1 und deswegen sind die Spalten linear abhängig. Weil sie nicht Null sind (nach Definition der Geraden), sind die Vektoren v und v' proportional zueinander.

Beweis in die anderen Richtung

Lemma (Algebraische Charakterisierung von parallelen Geraden). Sind die Geraden $L_{A,v} = \{A + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ und $L_{A',v'} = \{A' + tv' \mid t \in \mathbb{R}\}$ parallel, so sind die Richtungsvektoren proportional: $v = \lambda v'$. Ferner gilt: ist $v = \lambda v'$, so sind die Geraden parallel oder fallen sie zusammen.

Wir haben oben das Gleichungssystem für die gemeinsamen Punkte von Geraden bekommen:

$$\begin{array}{rcl} v_1 t - \tau v_1' & = & A_1' - A_1 \\ v_2 t - \tau v_2' & = & A_2' - A_2 \end{array}$$

Ist $v = \lambda v'$, so sieht das Gleichungssystem wie folgt aus:

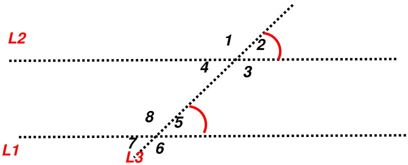
$$\begin{array}{rcl} v_1'(\lambda t - \tau) & = & A_1' - A_1 \\ v_2'(\lambda t - \tau) & = & A_2' - A_2 \end{array} \quad \left(\iff \quad (\lambda t - \tau)v' = \begin{pmatrix} A_1' - A_1 \\ A_2' - A_2 \end{pmatrix}. \right)$$

Wir sehen: ist der Vektor $\begin{pmatrix} A_1' - A_1 \\ A_2' - A_2 \end{pmatrix}$ nichtproportional zum Vektor v', so gibt es keine Schnittpunkte. Sind die Vektoren proportional, also $\begin{pmatrix} A_1' - A_1 \\ A_2' - A_2 \end{pmatrix} = \mu v'$, so ist jedes Paar (t, τ) sodass $\lambda t - \tau = \mu$ eine Lösung. Wir sehen, dass jeder Punkt $A + tv$ der Geraden $L_{A,v}$ auf der Geraden $L_{A',v'}$ liegt, weil er in der Form $A' + (t\lambda - \mu)v'$ darstellbar ist. Analog zeigt man dass jeder Punkt $A' + \tau v'$ auf $L_{A,v}$ liegt. Deswegen fallen die Geraden zusammen.

Stufen-, Wechsel- und Gegenwinkel

Aus der Schule ist bekannt, was Stufen-, Wechsel- und Gegenwinkel sind. Formale Definition werde ich zuerst nicht geben. Sie benutzt Begriff "Halbebene" (ich werde Halbebenen später besprechen; und eventuell auch die Definition von Stufenwinkel noch einmal wiederholen).
Wenn Definition und einfachere Eigenschaften von Halbebene bespochen sind, kann man wie folgt vorgehen: Die drei Geraden L_3 (heißt Sekante), und parallele Geraden $L_1 \parallel L_2$ erzeugen 8 Winkel, siehe das Bild.

Die drei Geraden L_3, heißt Sekante, und parallele Geraden $L_1 \parallel L_2$ erzeugen 8 Winkel, siehe das Bild.

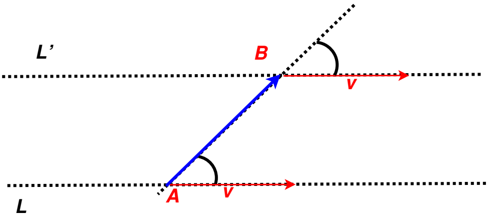


Die Paaren von Stufenwinkel sind wie folgt charakterisiert: Zwei Winkel aus ein paar von Stufenwinkel liegen in einer Halbebene bezüglich der Sekanten. Bezüglich einer der parallelen Geraden liegt ein von Winkel in der gleichen Halbebene, in welchen die zweite parallele Gerade liegt. Bezüglich der anderen parallelen Geraden liegt der zweite Winkel nicht in der Halbebene, in welchen die erste parallele Gerade liegt.

Auf dem Bild ist ein Paar von Stufenwinkel rot markiert.

Die Definitionen von Wechsel- und Gegenwinkel kann man ähnlich geben.

Beweis der Gleichheit von Stufenwinkel



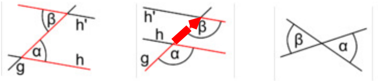
O.B.d.A. sind die parallele Geraden L, L' durch $L = \{A + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ und $L' = \{B + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ gegeben und die sie schneidende Gerade ist $L_{AB} = L_{A,\vec{AB}}$.

Die Parallelverschiebung auf $\vec{AB}$ (der blaue Vektor auf dem Bild) bildet den Winkel auf seinen Stufenwinkel ab. In der Tat, die Parallelverschiebung bildet die Halbgerade $\{A + t \cdot v \mid t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ auf die Halbgerade $g = \{\underbrace{A + \vec{AB}}_{B} + t \cdot v \mid t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$, und die Halbgerade

$\{A + t\vec{AB} \mid t \geq 0\}$ auf $\{A + t \cdot \vec{AB} + \vec{AB} \mid t \in \mathbb{R}\} = \{B + t \cdot \vec{AB} \mid t \in \mathbb{R}\}$ ab.

Entscheidende Schritt: Die Parallelverschiebung ist eine Isometrie und deswegen sind die Stufenwinkel(maße) gleich.

Gleichheit von Gegenwinkel und Wechselwinkel.



Wechsel-, Stufen- und Gegenwinkel

Man kann die Gleicheit von Wechselwinkel und Gegenwinkel mit einer ähnlichen Methode Beweisen, d.h., eine Isometrie finden, welche Winkel etwa in einen Wechselwinkel überführt.

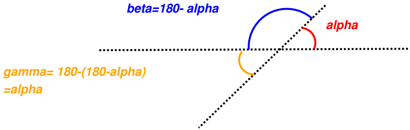
Es wird eventuell als Hausaufgabe gegeben, und wird auch in Kapitel "Punktsymmetrien" betrachtet. Ich werde hier einen anderen Beweis vorführen, welcher die am Anfang des Foliensatzes bewiesenen Aussage benutzt.

Zuerst bemerken wir, dass offener Winkel Winkelweite 180° hat: weil, in diesem Fall, die Richtungsvektoren u und v proportional mit einem negativen Koeffizient $\lambda < 0$: $u = \lambda v$. Dann gilt (nach Cauchy-Schwarz-Ungleichung; mann kann es auch direkt ausrechnen):

$$\frac{\langle u, v\rangle}{|u|\,|v|} = -1,$$

und Winkelweite ist $\arccos(-1) = \pi$.

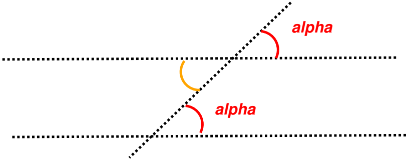
Beweis der Gleichheit von Gegenwinkel



Dann gilt: weil $\alpha + \beta = 180^\circ$, ist
$\beta = 180^\circ - \alpha$

Analog gilt: weil $\beta + \gamma = 180^\circ$, ist
$\gamma = 180^\circ - \beta = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha$.

Beweis der Gleichheit von Wechselwinkel



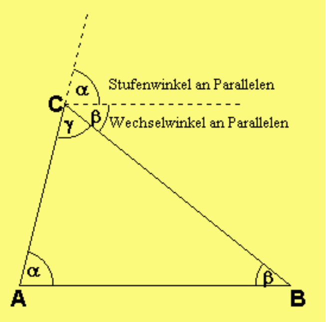
Wir haben gezeigt, dass die rot gefärbten Winkel gleich(weit) als Stufenwinkel sind, und $\alpha = \gamma$ als Gegenwinkel

Daraus folgt die Gleichheit von Wechselwinkel.

Winkelsummensatz für Dreieck

Winkelsummensatz Die Winkelsumme im Dreieck ist 180°.

Beweis. (Gleichweite Winkel werden als gleich bezeichnet.)
Die Winkel α bei den Punkten A und C sind als Stufenwinkel gleich. Die Winkel β bei den Punkten B und C sind als Wechselwinkel gleich. Beim Punkt C sieht man: $\alpha + \beta + \gamma = 180$ □



Zusammenfassung

- Wir haben die Additionsformel für Winkelweiten gezeigt (zwei Beweise, ein mit “Brechstangemethode”, kurz skizziert, zweiter mit Hilfe von Isometrie)
- Wir haben Gleichheit von Gegen- , Stufen- und Wechselwinkel bewiesen, mit Anwendung von Isometrien und der Additionsformel.
- Wir haben die Additionsformel und die Gleichheit von Stufenwinkel benutzt, um zu zeigen, dass die Summe von Winkel(weiten) eines Dreiecks gleich π ist