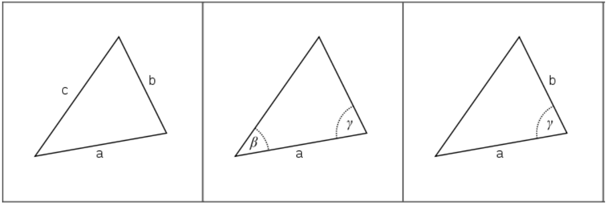
Plan für die nächste zwei Foliensätze

Plan für die nächste zwei Foliensätze

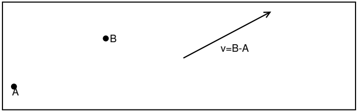
- Kongruenzsätze: aus der Schule wissen wir die SSS, SWS, WSW und SSW – Kongruenzsätze für Dreiecke:



Wir wollen diese Sätze im Rahmen unseres Modells (wenn Punkte die $2-$Tupel von reellen Zahlen sind) beweisen.

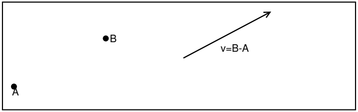
Isometrien von $\mathbb{R}^2$, die einen Punkt A auf B abbilden

Gegeben sind zwei Punkte $A, B \in \mathbb{R}^2$. Eine Isometrie, mit $A \longmapsto B$, kann man sofort finden: die Translation $T_v \in Iso$; $T_v(x) = x + v$ mit $v = B - A$ bildet A auf B ab.



Isometrien von $\mathbb{R}^2$, die einen Punkt A auf B abbilden

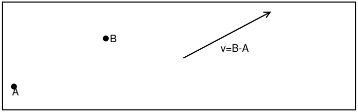
Gegeben sind zwei Punkte $A, B \in \mathbb{R}^2$. Eine Isometrie, mit $A \longmapsto B$, kann man sofort finden: die Translation $T_v \in Iso$; $T_v(x) = x + v$ mit $v = B - A$ bildet A auf B ab.



Frage. Wie beschreibt man ALLE Isometrien, mit $A \longmapsto B$?

Isometrien von $\mathbb{R}^2$, die einen Punkt A auf B abbilden

Gegeben sind zwei Punkte $A, B \in \mathbb{R}^2$. Eine Isometrie, mit $A \longmapsto B$, kann man sofort finden: die Translation $T_v \in Iso$; $T_v(x) = x + v$ mit $v = B - A$ bildet A auf B ab.

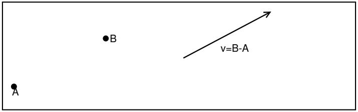


Frage. Wie beschreibt man ALLE Isometrien, mit $A \longmapsto B$?

Bemerkung. Man kann dies direkt ausrechnen, in dem man das Gleichungssystem $OA + b = B$ für die unbekannte orthogonale Matrix O und den unbekannten Vektor b löst (da die Matrix O eine $D(\alpha)$ oder eine $S(\alpha)$ ist, ist das ein algebraisches (nichtlineares) Gleichungssystem auf drei Unbekannte b_1, b_2, α; es ist trotzdem lösbar).

Isometrien von $\mathbb{R}^2$, die einen Punkt A auf B abbilden

Gegeben sind zwei Punkte $A, B \in \mathbb{R}^2$. Eine Isometrie, mit $A \longmapsto B$, kann man sofort finden: die Translation $T_v \in Iso$; $T_v(x) = x + v$ mit $v = B - A$ bildet A auf B ab.

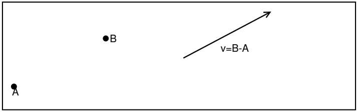


Frage. Wie beschreibt man ALLE Isometrien, mit $A \longmapsto B$?

Bemerkung. Man kann dies direkt ausrechnen, in dem man das Gleichungssystem $OA + b = B$ für die unbekannte orthogonale Matrix O und den unbekannten Vektor b löst (da die Matrix O eine $D(\alpha)$ oder eine $S(\alpha)$ ist, ist das ein algebraisches (nichtlineares) Gleichungssystem auf drei Unbekannte b_1, b_2, α; es ist trotzdem lösbar). Diese Methode wird aber für kompliziertere Aufgaben nichtanwendbar.

Isometrien von $\mathbb{R}^2$, die einen Punkt A auf B abbilden

Gegeben sind zwei Punkte $A, B \in \mathbb{R}^2$. Eine Isometrie, mit $A \longmapsto B$, kann man sofort finden: die Translation $T_v \in Iso$; $T_v(x) = x + v$ mit $v = B - A$ bildet A auf B ab.

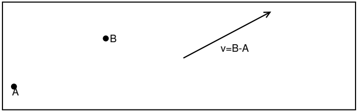


Frage. Wie beschreibt man ALLE Isometrien, mit $A \longmapsto B$?

Bemerkung. Man kann dies direkt ausrechnen, in dem man das Gleichungssystem $OA + b = B$ für die unbekannte orthogonale Matrix O und den unbekannten Vektor b löst (da die Matrix O eine $D(\alpha)$ oder eine $S(\alpha)$ ist, ist das ein algebraisches (nichtlineares) Gleichungssystem auf drei Unbekannte b_1, b_2, α; es ist trotzdem lösbar). Diese Methode wird aber für kompliziertere Aufgaben nichtanwendbar.
Man kann die Lösung auch erraten
(in diesem Fall sind solche Isometrien die Verkettungen von Drehungen um A und Parallelverschiebung $T_{(B-A)}$ oder Verkettungen von Spiegelungen bzgl. den Punkt A enthaltenden Geraden und Parallelverschiebung $T_{(B-A)}$).

Isometrien von $\mathbb{R}^2$, die einen Punkt A auf B abbilden

Gegeben sind zwei Punkte $A, B \in \mathbb{R}^2$. Eine Isometrie, mit $A \longmapsto B$, kann man sofort finden: die Translation $T_v \in Iso$; $T_v(x) = x + v$ mit $v = B - A$ bildet A auf B ab.



Frage. Wie beschreibt man ALLE Isometrien, mit $A \longmapsto B$?

Bemerkung. Man kann dies direkt ausrechnen, in dem man das Gleichungssystem $OA + b = B$ für die unbekannte orthogonale Matrix O und den unbekannten Vektor b löst (da die Matrix O eine $D(\alpha)$ oder eine $S(\alpha)$ ist, ist das ein algebraisches (nichtlineares) Gleichungssystem auf drei Unbekannte b_1, b_2, α; es ist trotzdem lösbar). Diese Methode wird aber für kompliziertere Aufgaben nichtanwendbar.
Man kann die Lösung auch erraten
(in diesem Fall sind solche Isometrien die Verkettungen von Drehungen um A und Parallelverschiebung $T_{(B-A)}$ oder Verkettungen von Spiegelungen bzgl. den Punkt A enthaltenden Geraden und Parallelverschiebung $T_{(B-A)}$).
In dem Fall ist es nicht so einfach zu zeigen, dass es sonst keine Isometrien mit der Bedingung $A \longmapsto B$ gibt.

Um die Frage zu beantworten, benutzen wir das *Iso* eine Gruppe ist.

Um die Frage zu beantworten, benutzen wir das *Iso* eine Gruppe ist.

Wir lösen zuerst die folgende Aufgabe :
Aufgabe. Man beschreibe alle Isometrien, die den Punkt $\vec{0}$ als *Fixpunkt* haben, d.h. $\vec{0} \longmapsto \vec{0}$.

Um die Frage zu beantworten, benutzen wir das *Iso* eine Gruppe ist.

Wir lösen zuerst die folgende Aufgabe :
Aufgabe. Man beschreibe alle Isometrien, die den Punkt $\vec{0}$ als *Fixpunkt* haben, d.h. $\vec{0} \longmapsto \vec{0}$.
Lösung. Nach Satz 1 hat jede Isometrie das Aussehen $I(x) = Ox + b$, wobei O eine orthogonale 2×2- Matrix ist.

Um die Frage zu beantworten, benutzen wir das *Iso* eine Gruppe ist.

Wir lösen zuerst die folgende Aufgabe :
Aufgabe. Man beschreibe alle Isometrien, die den Punkt $\vec{0}$ als *Fixpunkt* haben, d.h. $\vec{0} \longmapsto \vec{0}$.
Lösung. Nach Satz 1 hat jede Isometrie das Aussehen $I(x) = Ox + b$, wobei O eine orthogonale 2×2- Matrix ist. Ist $I(\vec{0}) = \vec{0}$, so ist $O\vec{0} + b = \vec{0}$, also $b = \vec{0}$.

Um die Frage zu beantworten, benutzen wir das *Iso* eine Gruppe ist.

Wir lösen zuerst die folgende Aufgabe :

Aufgabe. Man beschreibe alle Isometrien, die den Punkt $\vec{0}$ als *Fixpunkt* haben, d.h. $\vec{0} \longmapsto \vec{0}$.

Lösung. Nach Satz 1 hat jede Isometrie das Aussehen $I(x) = Ox + b$, wobei O eine orthogonale 2×2- Matrix ist. Ist $I(\vec{0}) = \vec{0}$, so ist $O\vec{0} + b = \vec{0}$, also $b = \vec{0}$. Also, muss jede Isometrie, die $\vec{0} \longmapsto \vec{0}$, das Aussehen $I(x) = Ox$ haben; offensichtlich haben alle Isometrien der Form $I(x) = Ox$ den Punkt $\vec{0}$ als Fixpunkt.

Zurück zu der alten Aufgabe: Wie beschreibt man ALLE Isometrien, mit $A \longmapsto B$?

Zurück zu der alten Aufgabe: Wie beschreibt man ALLE Isometrien, mit $A \longmapsto B$?

Lösung. Angenommen, $I(A) = B$. Wir betrachten die Isometrie $T_{(-B)} \circ I \circ T_A$. (Die Verkettung $T_{(-B)} \circ I \circ T_A$ ist eine Isometrie, weil Verkettung von Isometrien stets eine Isometrie ist; siehe Vorl. 1).

Zurück zu der alten Aufgabe: Wie beschreibt man ALLE Isometrien, mit $A \longmapsto B$?

Lösung. Angenommen, $I(A) = B$. Wir betrachten die Isometrie $T_{(-B)} \circ I \circ T_A$. (Die Verkettung $T_{(-B)} \circ I \circ T_A$ ist eine Isometrie, weil Verkettung von Isometrien stets eine Isometrie ist; siehe Vorl. 1). Die Isometrie $I' := T_{(-B)} \circ I \circ T_A$ hat Fixpunkt $\vec{0}$: nachrechnen:

$$T_{(-B)} \circ I \circ T_A(\vec{0}) = T_{(-B)}(I(T_A(\vec{0}))) = T_{(-B)}(\underbrace{I(A)}_{B}) = T_{(-B)}(B) = B - B = \vec{0}.$$

Zurück zu der alten Aufgabe: Wie beschreibt man ALLE Isometrien, mit $A \longmapsto B$?

Lösung. Angenommen, $I(A) = B$. Wir betrachten die Isometrie $T_{(-B)} \circ I \circ T_A$. (Die Verkettung $T_{(-B)} \circ I \circ T_A$ ist eine Isometrie, weil Verkettung von Isometrien stets eine Isometrie ist; siehe Vorl. 1). Die Isometrie $I' := T_{(-B)} \circ I \circ T_A$ hat Fixpunkt $\vec{0}$: nachrechnen:

$$T_{(-B)} \circ I \circ T_A(\vec{0}) = T_{(-B)}(I(T_A(\vec{0}))) = T_{(-B)}(\underbrace{I(A)}_{B}) = T_{(-B)}(B) = B - B = \vec{0}.$$

Dann ist $I'(x) = Ox$. Da *Iso* eine Gruppe ist, ist die Bedingung $\underbrace{I' = T_{(-B)} \circ I \circ T_A}_{(*)}$ zu der Bedingung $\underbrace{T_B \circ I' \circ T_{(-A)} = I}_{(**)}$ äquivalent:

Zurück zu der alten Aufgabe: Wie beschreibt man ALLE Isometrien, mit $A \longmapsto B$?

Lösung. Angenommen, $I(A) = B$. Wir betrachten die Isometrie $T_{(-B)} \circ I \circ T_A$. (Die Verkettung $T_{(-B)} \circ I \circ T_A$ ist eine Isometrie, weil Verkettung von Isometrien stets eine Isometrie ist; siehe Vorl. 1). Die Isometrie $I' := T_{(-B)} \circ I \circ T_A$ hat Fixpunkt $\vec{0}$: nachrechnen:

$$T_{(-B)} \circ I \circ T_A(\vec{0}) = T_{(-B)}(I(T_A(\vec{0}))) = T_{(-B)}(\underbrace{I(A)}_{B}) = T_{(-B)}(B) = B - B = \vec{0}.$$

Dann ist $I'(x) = Ox$. Da *Iso* eine Gruppe ist, ist die Bedingung $\underbrace{I' = T_{(-B)} \circ I \circ T_A}_{(*)}$ zu der Bedingung $\underbrace{T_B \circ I' \circ T_{(-A)} = I}_{(**)}$ äquivalent: um zu zeigen, dass alle Isometrien I, I', die $(*)$ erfüllen, auch die Bedingung $(**)$ erfüllen müssen, kann man $(*)$ von links mit $\left(T_{(-B)}\right)^{-1} = T_B$ und von rechts mit $(T_A)^{-1} = T_{(-A)}$ multiplizieren.

Zurück zu der alten Aufgabe: Wie beschreibt man ALLE Isometrien, mit $A \longmapsto B$?

Lösung. Angenommen, $I(A) = B$. Wir betrachten die Isometrie $T_{(-B)} \circ I \circ T_A$. (Die Verkettung $T_{(-B)} \circ I \circ T_A$ ist eine Isometrie, weil Verkettung von Isometrien stets eine Isometrie ist; siehe Vorl. 1). Die Isometrie $I' := T_{(-B)} \circ I \circ T_A$ hat Fixpunkt $\vec{0}$: nachrechnen:

$$T_{(-B)} \circ I \circ T_A(\vec{0}) = T_{(-B)}(I(T_A(\vec{0}))) = T_{(-B)}(\underbrace{I(A)}_{B}) = T_{(-B)}(B) = B - B = \vec{0}.$$

Dann ist $I'(x) = Ox$. Da *Iso* eine Gruppe ist, ist die Bedingung $\underbrace{I' = T_{(-B)} \circ I \circ T_A}_{(*)}$ zu der Bedingung $\underbrace{T_B \circ I' \circ T_{(-A)} = I}_{(**)}$ äquivalent: um zu zeigen, dass alle Isometrien I, I', die $(*)$ erfüllen, auch die Bedingung $(**)$ erfüllen müssen, kann man $(*)$ von links mit $\left(T_{(-B)}\right)^{-1} = T_B$ und von rechts mit $(T_A)^{-1} = T_{(-A)}$ multiplizieren. Analog gilt: Um zu zeigen, dass alle Isometrien I, I', die $(**)$ erfüllen, auch die Bedingung $(*)$ erfüllen müssen, kann man $(**)$ von links mit $T_{(-B)}$ und von rechts mit T_A multiplizieren.

Zurück zu der alten Aufgabe: Wie beschreibt man ALLE Isometrien, mit $A \longmapsto B$?

Lösung. Angenommen, $I(A) = B$. Wir betrachten die Isometrie $T_{(-B)} \circ I \circ T_A$. (Die Verkettung $T_{(-B)} \circ I \circ T_A$ ist eine Isometrie, weil Verkettung von Isometrien stets eine Isometrie ist; siehe Vorl. 1). Die Isometrie $I' := T_{(-B)} \circ I \circ T_A$ hat Fixpunkt $\vec{0}$: nachrechnen:

$$T_{(-B)} \circ I \circ T_A(\vec{0}) = T_{(-B)}(I(T_A(\vec{0}))) = T_{(-B)}(\underbrace{I(A)}_{B}) = T_{(-B)}(B) = B - B = \vec{0}.$$

Dann ist $I'(x) = Ox$. Da *Iso* eine Gruppe ist, ist die Bedingung $\underbrace{I' = T_{(-B)} \circ I \circ T_A}_{(*)}$ zu der Bedingung $\underbrace{T_B \circ I' \circ T_{(-A)} = I}_{(**)}$ äquivalent: um zu zeigen, dass alle Isometrien I, I', die $(*)$ erfüllen, auch die Bedingung $(**)$ erfüllen müssen, kann man $(*)$ von links mit $\left(T_{(-B)}\right)^{-1} = T_B$ und von rechts mit $(T_A)^{-1} = T_{(-A)}$ multiplizieren. Analog gilt: Um zu zeigen, dass alle Isometrien I, I', die $(**)$ erfüllen, auch die Bedingung $(*)$ erfüllen müssen, kann man $(**)$ von links mit $T_{(-B)}$ und von rechts mit T_A multiplizieren. Also besteht die Menge der Isometrien, mit $A \mapsto B$, aus Isometrien der Form $x \mapsto O(x - A) + B = Ox + \underbrace{B - OA}_{v}$.