Plan

Hauptziel ist, den SSS-Kongruenzsatz formulieren und zu beweisen. Vorher werden wir die Isometrien beschreiben, welche Strecke auf Strecke überführen, sowie Affine Geometrie wiederholen.

Wann kann man eine Strecke auf eine andere Strecke überführen?

Lemma 11. *Seien $A \neq B$ und $A' \neq B' \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt: es gibt eine Isometrie I mit $A \longmapsto A'$ und $B \longmapsto B'$, genau dann wenn $d(A, B) = d(A', B')$. Ferner gilt: gilt $d(A, B) = d(A', B')$, so gibt es genau zwei Isometrien mit $A \longmapsto A'$ und $B \longmapsto B'$.*

Bemerkung. Die Richtung "$\Longrightarrow$" ist trivial: gibt es eine solche Isometrie I, so ist $d(A, B) = d(I(A), I(B)) = d(A', B')$. Die Richtung "$\Longleftarrow$" ist weniger trivial (obwohl anschaulich klar). Wir werde sie beweisen.

Beweis des Spezialfalls des Lemmas

Wichtiger Spezialfall: Es sei $A = A' = \vec{0}$ und $d(A, B) = d(A', B')(:= r)$. Dann gilt: es gibt genau zwei Isometrien, welche $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$.

Beweis des Spezialfalls. Bildet die Isometrie $x \mapsto Ox + b$ den Punkt $\vec{0}$ auf sich selbst ab, so ist $b = \vec{0}$ (weil $O\vec{0} + b = b$). Wir sollen deswegen alle orthogonale Matrizen finden sodass $OB = B'$.

Seien $B = r\binom{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $B' = r\binom{\cos\alpha'}{\sin\alpha'}$. In Vorlesung 1c haben wir alle orthogonalen 2×2-Matrizen beschrieben; jede orthogonale 2×2-Matrix hat eine von zwei Formen:

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & -\cos x \end{pmatrix}.$$

Im ersten Fall, die Gleichung $OB = B'$ sieht wie folgt aus:

$$r\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\alpha' \\ \sin\alpha' \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \cos x\cos\alpha - \sin x\sin\alpha \\ \sin x\cos\alpha + \cos x\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha' \\ \sin\alpha' \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \cos(x+\alpha) \\ \sin(x+\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha' \\ \sin\alpha' \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass $x = \alpha' - \alpha + 2\pi k$. Daraus folgt die Eindeutigkeit der Drehmatrix O, welche $B \mapsto B'$.

Beweis im Fall, wenn O die zweite Form hat, ist analog:

Für $O = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & -\cos x \end{pmatrix}$, bekommen wir:

$$OB = B' \iff r \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & -\cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \alpha' \\ \sin \alpha' \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha \\ \sin x \cos \alpha - \cos x \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha' \\ \sin \alpha' \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \cos(x - \alpha) \\ \sin(x - \alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha' \\ \sin \alpha' \end{pmatrix}$$

woraus folgt, dass $x = \alpha + \alpha' + 2\pi k$. Wir sehen wieder, dass die Matrix O eindeutig ist.

Wir haben bewiesen, dass es genau zwei Isometrien (mit $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$) gibt: eine Isometrie hat $det(O) = 1$; die zweite $\det(O) = -1$).
Spezialfall ist damit bewiesen.

Reduzieren des allgemeinen Falls zum Spezialfall

Lemma 11 in Richtung $\Longrightarrow$. *Seien $A \neq B$ und $A' \neq B' \in \mathbb{R}^2$ sodass $d(A,B) = d(A',B')$. Dann gibt eine genau zwei (verschiedenen) Isometrien I, I' mit $A \longmapsto A'$ und $B \longmapsto B'$.*

Wie in Vorlesung 1 bezeichnen wir mit T_v die Parallelverschiebung, $T_v(x) = x + v$.
Wir merken: Ist $I(A) = A'$, so gilt $T_{-A'} \circ I \circ T_A(\vec{0}) = \vec{0}$ und umgekehrt: ist $T_{-A'} \circ I \circ T_A(\vec{0}) = \vec{0}$, so gilt $I(A) = A'$.

(Beweis in "$\Longrightarrow$"-Richtung:

$$T_{-A'} \circ I \circ T_A(\vec{0}) = T_{-A'}(I(T_A(\vec{0}))) = T_{-A'}(\underbrace{I(A)}_{A'}) = T_{-A'}(A') = \vec{0}.$$

Beweis in "$\Longleftarrow$"-Richtung ist analog, man muss die Folge von Gleichungen oben von rechts nach links lesen).

Die Abbildung $T_{-A'} \circ I \circ T_A$ ist eine Isometrie als Verkettung von Isometrien. Sie bildet $\vec{0} \mapsto \vec{0}$ und $\underbrace{T_A(B)}_{\tilde{B}} \mapsto \underbrace{T_{A'}(B')}_{\tilde{B}'}$. Man merke, dass

$d(\vec{0}, \tilde{B}) = d(\vec{0}, \tilde{B}') = r$.
Wir haben alle Isometrien, welche $\vec{0} \mapsto \vec{0}$ und $\tilde{B} \mapsto \tilde{B}'$, im Spezialfall beschreiben. Es gibt genau zwei davon, wir nennen sie G und G'.

Für die Isometrie I haben wir dann:
$T_{-A'} \circ I \circ T_A = G \quad \text{oder} \quad T_{-A'} \circ I \circ T_A = G'. \quad (*)$

$\boxed{\text{Wir haben bekommen} \quad T_{-A'} \circ I \circ T_A = G \quad \text{oder} \quad T_{-A'} \circ I \circ T_A = G'. \quad (*)}$

Die Gleichungen der Form $g_1 X g_2 = g_3$ in einer Gruppe (wobei $g_1, g_2, g_3 \in G$ sind gegeben und $X \in G$ ist unbekannt) haben wir in Vorlesung 1 besprochen; sie sind eindeutig lösbar, und die Lösung ist:

$$X := g_1^{-1} g_3 g_2^{-1}.$$

In unserem Fall, die Lösungen von Gleichungen $(*)$ oben sind jeweils I und I' gegeben durch

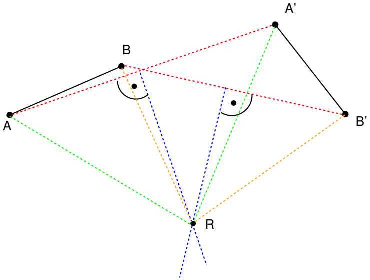
$$I = T_{A'} \circ G \circ T_A \quad \text{und} \quad I' = T_{A'} \circ G' \circ T_A.$$

(Man merke auch, dass $T_{A'} \circ G \circ T_A \neq T_{A'} \circ G' \circ T_A$, man beweist das mit Hilfe von Multiplikation mit $T_{-A'}$ von links und mit T_A von rechts.) Das Lemma 11 ist bewiesen.

Exkurs: Elementargeometrischer Beweis vom Lemma 11

Mit Methoden von Elementargeometrie kann man das Lemma 11 auch beweisen. Beweis braucht Kongruenzsätze für Dreiecken (welche wir mit Hilfe von Lemma 11 beweisen werden), sodass er nicht in Rahmen unserer Vorlesung anwendbar ist; weil sonst es eine logische Schleife entsteht. Wenn wir aber Kongruenzsätze als Axiomen annehmen (was man in einer Elementar-Geometrie Vorlesung oft tut), kann man Existenz von zwei Isometries $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$ zeigen.
Auch die Eindeutigkeitaussage kann man Elementargeometrisch beweisen, jedoch ist der Beweis deutlich schwieriger als bei uns

Ich skizziere hier wie man Existenz einer Isometrie, welche $A \mapsto A'$ und $B \mapsto B'$. Im Beweis nehme ich an, dass AB nicht zur $A'B'$ parallel ist. Der Fall $AB || A'B'$ soll separat behandelt werden, ich werde es hier nicht tun.



Auf dem Bild links ist die blaue Linien die Mittelsenkrechten der (roten) Strecken AA' und BB' und R ist deren Schnittpunkt. Die Dreiecke ABR und $A'B'R$ sind kongruent nach SSS (weil die gleichfarbige Seiten gleichlang sind). Dann sind $\measuredangle ARB = \measuredangle A'RB'$, daraus folgt, dass $\measuredangle ARA' = \measuredangle BRB'$ und die Drehung um R um Winkel $\measuredangle ARA$ führt $A \mapsto A'$ und $B \mapsto B'$.

Existenz von noch einen Isometrie kann man auch mit Hilfe von Hilfskonstruktion und Kongruenzsätzen zeigen. Diese Isometrie wird Gleitspiegelung sein, wir werden das Thema später behandeln.

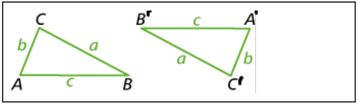
Kongruenz

Def. Zwei Teilmengen $T_1, T_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ heißen kongruent, wenn eine Isometrie I von $\mathbb{R}^2$ existiert, s.d. $I(T_1) = T_2$. Diese Isometrie heißt auch Bewegung, welche T_1 in T_2 überführt.

Def. Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^2$, s.d. sie nicht auf einer Geraden liegen. Die Menge $AB \cup BC \cup AB$ heißt ein Dreieck. Wir werden das Dreieck mit Δ_{ABC} oder ABC bezeichnen. Wenn die Punkte A, B, C auf einer Geraden liegen, ist die Menge eine Strecke, $AB \cup BC \cup AB$; wir können sie als ausgeartetes Dreieck verstehen (wir werden solche ausgeartete Dreiecke eher selten betrachten).

Bemerkung. Dreieck Δ_{ABC} (als Objekt, eine Menge) bestimmt eindeutig die Ecken (Beweis ist im Wesentlichen wie für eine Strecke; wir werden einen alternativen Beweis im Kapitel "konvexe Geometrie" geben.)

Selbstverständlich bestimmt ein Dreieck nicht die Benennung der Ecken. Weil eine Isometrie von Dreiecken Δ_{ABC} und $\Delta_{A'B'C'}$ bedeutet nicht dass $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $C \mapsto C'$ (im Unterschied zu in der Schule verwendeten Bezeichnungen). Deswegen werden wir in den Kongruenzsätze für Dreiecke (nächste Seite) eine starkere Bedingung betrachen; wir werden über Isometrien sprechen, welche $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $C \mapsto C'$ abbilden, und nicht über Isometrien von Δ_{ABC} und $\Delta_{A'B'C'}$. Deswegen taucht in unserem Formulierung das Wort "kongruent" nicht auf.



Quelle: `https://learnattack.de/schuelerlexikon/mathematik/kongruenzsaetze`

SSS-Kongruenzsatz. *Es seien A, B, C und A', B', C' Punkte des $\mathbb{R}^2$, s.d. weder A, B, C noch A', B', C' auf einer Geraden liegen. Dann gilt: es gibt eine Isometrie I, mit $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $C \mapsto C'$, genau dann wenn $d(A, B) = d(A', B')$, $d(B, C) = d(B', C')$ und $d(A, C) = d(A', C')$. Ferner gilt: ist $d(A, B) = d(A', B')$, $d(B, C) = d(B', C')$ und $d(A, C) = d(A', C')$, so ist eine solche Isometrie eindeutig.*

Eine von Aussagen des Satzes ist offensichtlich: wenn es eine Isometrie gibt welche $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $C \mapsto C'$, dann gilt $d(A, B) = d(A', B')$, $d(B, C) = d(B', C')$ und $d(A, C) = d(A', C')$. Wir nehmen an, dass $d(A, B) = d(A', B')$, $d(B, C) = d(B', C')$ und $d(A, C) = d(A', C')$, und zeigen Existenz und Eindeutigkeit einer solcher Isometrie.

Für Eindeutigkeit brauchen wir eine Aussage aus Lineare Algebra II (Kapitel "Affine Geometrie")

Crashkurs affine Abbildungen: Eine affine Abbildung (der Ebene $\mathbb{R}^2$) ist eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch der Formel:

$$x \mapsto Ax + b \quad \text{wobei } A \text{ eine } 2 \times 2\text{-Matrix ist.}$$

Wir sehen, dass Isometrien von $\mathbb{R}^2$ affine Abbildungen sind.

Fakt (LA II). Die Punkte $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ seien nicht-kollinear, d.h., sie liegen nicht auf einer Geraden. Sind sie Fixpunkte einer affinen Abbildung f (d.h., gilt $f(x) = x,\ f(y) = y,\ f(z) = z$), so ist die Abbildung f die Identitätsabbildung.

Fakt (LA II). Die Punkte $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ seien nicht-kollinear, d.h., sie liegen nicht auf einer Geraden. Sind sie Fixpunkte einer affinen Abbildung f (d.h., gilt $f(x) = x,\ f(y) = y,\ f(z) = z$), so ist die Abbildung f die Identitätsabbildung.

Eine Beweisskizze mit Hilfe eines Tricks:

Für die affine Abbildung f gegeben durch $x \mapsto Ax + b$ betrachten wir eine lineare Abbildung $\tilde{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch:

$$\tilde{f}(X) = \tilde{A}X := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & b_1 \\ A_{21} & A_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X.$$

Ist $f(x) = x,\ f(y) = y,\ f(z) = z$, so sind die Vektoren

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}\ ,\ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix}\ ,\ Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Eigenvektoren von $\tilde{A}$ mit Eigenwert 1, denn (z.B. für X)

$$\tilde{f}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & b_1 \\ A_{21} & A_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + b_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(bitte die Gleichung $(*)$ rechnerisch nachprüfen). Wir merken, dass auf der unteren Position vom Ergebnis 1 steht, und dass die erste zwei Positionen den Vektor $A\binom{x_1}{x_2} + \binom{b_1}{b_2} \in \mathbb{R}^2$ bilden. Daraus folgt, dass für x sodass $f(x) = x$ wir $\tilde{f}(X) = X$ haben sodass X Eigenvektor von $\tilde{f}$ ist mit Eigenwert 1.
Existenz von drei linear unabhängigen Eigenvektoren mit Eigenwert 1 in $\mathbb{R}^3$ impliziert, dass die lineare Abbildung die Identitätsabbildung ist. Daraus folgt, dass

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & b_1 \\ A_{21} & A_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{schließlich ist } A = Id \text{ und } b = \vec{0} \text{ sodass } f = Id$$

Folgerung. Bilder von drei nicht-kollinearen Punkten bestimmen die Isometrie (von $\mathbb{R}^2$) eindeutig.

Beweis. Angenommen, I und $\tilde{I}$ sind Isometrien sodass $I(A) = \tilde{I}(A),\ I(B) = \tilde{I}(B)$ und $I(C) = \tilde{I}(C)$, wobei die Punkte A, B, C nichtkollinear sind. Dann gilt: $I^{-1} \circ \tilde{I}(A) = A$, $I^{-1} \circ \tilde{I}(B) = B$ und $I^{-1} \circ \tilde{I}(C) = C$. Aus Fakt (von der vorherigen Seite), ist dann $I^{-1} \circ \tilde{I} = Id$. Daraus folgt $I = \tilde{I}$, $\square$

SSS-Kongruenzsatz. *Es seien A, B, C und A', B', C' Punkte des $\mathbb{R}^2$, s.d. weder A, B, C noch A', B', C' auf einer Geraden liegen. Dann gilt: es gibt eine Isometrie I, mit $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $C \mapsto C'$, genau dann wenn $d(A, B) = d(A', B')$, $d(B, C) = d(B', C')$ und $d(A, C) = d(A', C')$. Ferner gilt: ist $d(A, B) = d(A', B')$, $d(B, C) = d(B', C')$ und $d(A, C) = d(A', C')$, so ist eine solche Isometrie eindeutig.*

Beweis. Nach Lemma 11 existieren genau 2 Abbildungen, I und $\tilde{I}$, mit $A \mapsto A'$ und $B \mapsto B'$. Wir betrachten $I(C)$ und $\tilde{I}(C)$. Diese Punkte sind verschieden nach der Folgerung von der vorherigen Seite.

Die Punkte $I(C)$ und $\tilde{I}(C)$ liegen auf dem Schnitt von zwei Kreisen
$K_{d(A,C)}(A') = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, A') = d(A, C)\}$,
$K_{d(B,C)}(B') = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, B') = d(B, C)\}$. Nach Hausaufgabe haben solche Kreise höchstens 2 Schnittpunkte; also sind die Punkte $I(C)$ und $\tilde{I}(C)$ genau diese Schnittpunkte. Da C' auch auf dem Schnitt von diesen Kreisen liegt, ist entweder $C' = I(C)$ oder $C' = \tilde{I}(C)$. $\square$