# Plan

SWS, WSW, SSW – Kongruenzsätze
(Auf dem Weg werden wir auch Sinusatz sowie Kongruenzsatz für Winkel beweisen)

# SWS-Kongruenzsatz.

**SWS-Kongruenzsatz.** *Es seien $A, B, C$ und $A', B', C'$ Punkte des $\mathbb{R}^2$, s.d. weder $A, B, C$ noch $A', B', C'$ auf einer Geraden liegen. Dann gilt: es gibt eine Isometrie $I$, mit $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $C \mapsto C'$, genau dann wenn $d(A, B) = d(A', B')$, $d(A, C) = d(A', C')$ und $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$. Ferner gilt: wenn diese Isometrie existiert, ist sie eindeutig.*

**Beweis.** In Richtung "$\Longrightarrow$" ist die Aussage fast offensichtlich: Wenn eine Isometrie mit $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $C \mapsto C'$ existiert, gilt $d(A, B) = d(A', B')$, $d(A, C) = d(A', C')$. Wie wir in Vorl. 1 bewiesen haben (siehe Folgerung 3 dort), erhält die Isometrie das Skalarprodukt, also $\langle A - B, A - C\rangle = \langle A' - B', A' - C'\rangle$. Ausserdem $|A - B| = d(A, B) = |A' - B'|$ und $|A - C| = d(A, C) = |A' - C'|$. Dann ist das Winkelmaß $\measuredangle BAC = \arccos\left(\frac{\langle A-B, A-C\rangle}{|A-B|\cdot|A-C|}\right)$ gleich dem Winkelmaß $\measuredangle B'A'C' = \arccos\left(\frac{\langle A'-B', A'-C'\rangle}{|A'-B'|\cdot|A'-C'|}\right)$.

Auf die gleiche Art funktioniert auch die "$\Longrightarrow$"–Richtung wird in WSW und SSW.

# Beweis in "$\Longleftarrow$"–Richtung.

**SWS-Kongruenzsatz.** *Es seien $A, B, C$ und $A', B', C'$ Punkte des $\mathbb{R}^2$, s.d. weder $A, B, C$ noch $A', B', C'$ auf einer Geraden liegen. Dann gilt: es gibt eine Isometrie $I$, mit $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $C \mapsto C'$, genau dann wenn $d(A,B) = d(A',B')$, $d(A,C) = d(A',C')$ und $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$. Ferner gilt: wenn diese Isometrie existiert, ist sie eindeutig.*

**Beweisidea:** Wir reduzieren die Aussage zum SSS-Kongruenzsatz.
Nach dem Kosinussatz gilt

$$|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 - 2|AC||AB|\cos(\measuredangle BAC).$$

Also, wenn $|AC| = |A'C'|$, $|AB| = |A'B'|$ ( $\iff d(A,B) = d(A',B')$, $d(A,C) = d(A',C')$) und $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$, muss auch $|BC| = |B'C'|$ gelten.
Die Aussage (Existenz und Eindeutigkeit der Isometrie) folgt dann aus dem SSS-Kongruenzsatz. $\square$

# Kongruenzsatz für Winkel

**Folgerung: Kongruenzsatz für Winkel.** Zwei nicht-triviale Winkel sind genau dann kongruent wenn die Winkelmaße gleich sind. Ferner gilt: es existieren genau zwei Kongruenzen, die einen nicht-trivialen Winkel in einen gleichweiten Winkel überführen.

**Beweis.** Beweis in Richtung "$\Longrightarrow$" ist wie beim Kongruenzsatz oben: Isometrie erhält Skalarprodukt; Winkelmaß ist nur mit Hilfe von Skalarprodukt definiert; also erhalten die Isometrien auch Winkelmaß.

Wir zeigen jetzt die "$\Longleftarrow$"–Richtung. Die Winkel seien gegeben durch $A, v, u$ bzw. $A', v', u'$. Die Vektoren $v$, $u$ sind bis auf einen positiven Faktor definiert; deswegen können wir oBdA annehmen, dass $|u| = |v| = |u'| = |v'| = 1$. Dann existiert nach SWS-Kongruenzsatz eine Isometrie mit $A \mapsto A'$, $A + v \mapsto A' + v'$ und $A + u \mapsto A' + u'$. Diese Abbildung bildet die Halbgerade $H_{A,v}$ auf $H_{A',v'}$ und die Halbgerade $H_{A,u}$ auf $H_{A',u'}$ ab; deswegen bildet sie den Winkel $\measuredangle uAv$ auf $\measuredangle u'A'v'$ ab.

Analog zeigt man die Existenz einer Abbildung, die die Richtungsvektoren vertauscht, d.H., die Halbgerade $H_{A,v}$ auf $H_{A',u'}$ und die Halbgerade $H_{A,u}$ auf $H_{A',v'}$ abbildet.

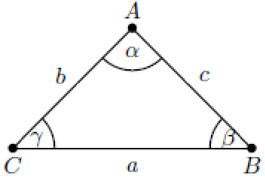
Wir haben also die Existenz von 2 solchen Isometrien gezeigt. Um zu zeigen, dass es genau zwei sind, bemerken wir, dass es genau zwei Punkte auf dem Winkel $\measuredangle uAv$ gibt, die den Abstand 1 zu $A$ haben, nämlich $A+v$ und $A+u$. Diese Punkte müssen auf Punkte des Winkels $\measuredangle u'A'v'$ abgebildet werden, die Abstand 1 zu $A'$ haben, also auf die Punkte $A'+v'$ und $A'+u'$, weil $A$ auf $A'$ abgebildet werden soll. Dann hat die gesuchte Isometrie die Eigenschaft $A \mapsto A$, $A+u \mapsto A'+u'$, $A+v \mapsto A'+v'$, oder die Eigenschaft $A \mapsto A$, $A+u \mapsto A'+v'$, $A+v \mapsto A'+u'$; in beiden Fällen ist eine solche Isometrie eindeutig nach SSS-Kongruenzsatz. $\square$

# WSW-Kongruenzsatz.

**WSW-Kongruenzsatz.** *Es seien $A, B, C$ und $A', B', C'$ Punkte des $\mathbb{R}^2$, s.d. weder $A, B, C$ noch $A', B', C'$ auf einer Geraden liegen. Dann gilt: es gibt eine Isometrie $I$ mit $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $C \mapsto C'$, genau dann wenn $d(A, B) = d(A', B')$, $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$ und $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$. Ferner gilt: wenn diese Isometrie existiert, ist sie eindeutig.*

**Beweis.** Richtung "$\Longrightarrow$" ist klar und würde oben, im Beweis des SWS-Satzes besprochen.
Für die Richtung "$\Longleftarrow$", werden wir die gleiche Methode wie bei der Beweis von SWS verwenden: wir reduzieren die Aussage zum bereits bewiesenen SWS-Satz (man könnte auch zum SSS reduzieren, ich bespreche wie). Im Beweis von SWS-Satz haben wir Cosinussatz benutzt, und zu beweisen, dass (falls $|AC| = |A'C'|$, $|AB| = |A'B'|$ und $\measuredangle BAC = \measuredangle B'AC'$) auch die Seiten $BC$ und $B'C'$ gleich sind. Hier benutzen wir den Sinussatz.

Zuerst müssen wir aber den Sinussatz formulieren und beweisen.




**Sinussatz.** Sei $\Delta_{ABC}$ ein Dreieck mit den Seitenlängen $a = |BC|$, $b = |AC|$ und $c = |AB|$ sowie den Winkelmaßen $\alpha = \measuredangle BAC$, $\beta = \measuredangle ABC$ und $\gamma = \measuredangle ACB$.Dann gilt

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}.$$

**Bemerkung.** Schulgeometrischer Beweis ist wie folgt: Man benutzt die Formel $\text{Flächeninhalt}(\Delta_{ABC}) = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha) = \frac{1}{2}ac\sin(\beta)$. Wenn man dies mit $abc$ dividiert, bekommt man
$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$.
Um diesen Beweis zu benutzen, brauchen wir aber den Begriff Flächeninhalt; und es ist nicht-trivial diesen sauber einzuführen. Außerdem haben wir selbstverständlich auch nicht die Formel $\text{Flächeninhalt}(\Delta_{ABC}) = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha)$. Wir werden deswegen einen alternativen Beweis lernen; im Beweis benutzen wir nur die Eigenschaften der Funktionen cos und die bereits bewiesene Formel
$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$.

**Beweis.** Nach dem Kosinussatz gilt für den Winkel in der Ecke $A$
$-2bc\cos(\alpha) = a^2 - (b^2 + c^2)$ und daher
$4b^2c^2(\cos(\alpha))^2 = (-a^2 + b^2 + c^2)^2$ .
Analog gilt $4a^2c^2(\cos(\beta))^2 = (a^2 - b^2 + c^2)^2$.

Daraus erhalten wir

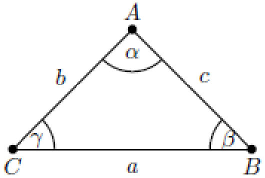
$$
\begin{aligned}
\frac{\sin^2(\alpha)}{\sin^2(\beta)} &= \frac{4a^2b^2c^2\left(1-\cos^2(\alpha)\right)}{4a^2b^2c^2\left(1-\cos^2(\beta)\right)} \\
&= \frac{4a^2b^2c^2 - a^2\left(-a^2+b^2+c^2\right)^2}{4a^2b^2c^2 - b^2\left(a^2-b^2+c^2\right)^2} \\
&= \frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{4b^2c^2-\left(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2+2b^2c^2\right)}{4a^2c^2-\left(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2+2a^2c^2-2b^2c^2\right)} \\
&= \frac{a^2}{b^2}.
\end{aligned}
$$

Da $a, b, \sin(\alpha), \sin(\beta) > 0$ zeigt dies $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$. Vertauschung der Rollen von $B$ und $C$ liefert $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$

# Beweis von WSW-Kongruenzsatz

**WSW-Kongruenzsatz.** *Es seien* $A, B, C$ *und* $A', B', C'$ *Punkte des* $\mathbb{R}^2$*, s.d. weder* $A, B, C$ *noch* $A', B', C'$ *auf einer Geraden liegen. Dann gilt: es gibt eine Isometrie* $I$ *mit* $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $C \mapsto C'$*, genau dann wenn* $d(A,B) = d(A',B')$, $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$ *und* $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$*. Ferner gilt: wenn diese Isometrie existiert, ist sie eindeutig.*

Wir bezeichnen die Seiten/Winkel des Dreiecks $\Delta_{ABC}$ wie auf dem Bild. Die entsprechenden Objekte von $\Delta_{A'B'C'}$ werden mit $a', b', c', \alpha', \beta', \gamma'$ bezeichnet.




Da $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma' = 180°$, folgt aus dem Winkelsummensatz für ein Dreieck $\gamma = \gamma'$. Wegen Sinussatz gilt:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{c} \quad \text{und} \quad \frac{\sin(\alpha')}{a'} = \frac{\sin(\gamma')}{c'}.$$

Da $c = c'$, $\alpha = \alpha'$ und $\gamma = \gamma'$, folgt aus dieser Formel $a = a'$, also $BC = B'C'$ . Nach SWS-Kongruenzsatz gibt es dann (genau) eine Isometrie mit $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$ und $C \mapsto C'$, $\square$

**Bemerkung.** Im Beweis haben wir gezeigt, dass $a = a'$ (sodass wir SWS anwenden können). Alternative Methode wäre, noch zu zeigen, dass $b = b'$, Beweis dafür ist analog zum Beweis das $a = a'$, und dann SSS anwenden.

# SSW-Kongruenzsatz

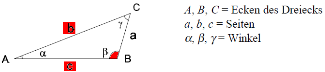
**SSW-Kongruenzsatz.** *Zwei Dreiecke, die in zwei Seitenlängen und in jenem Winkel übereinstimmen, der der längeren Seite gegenüberliegt, sind kongruent.*
D.h., wenn für zwei Punktetripel $A, B, C$ und $A', B', C'$ gilt:

- weder $A, B, C$ noch $A', B', C'$ liegen auf einer Geraden,
- $d(A, C) = d(A', C')$, $d(A, B) = d(A', B')$ und $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$,
- und außerdem $|AC| \geq |AB|$ und $|AC| \geq |BC|$,

dann existiert eine Isometrie mit $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $C \mapsto C'$.

**Beweis.** Nach Kosinussatz gilt

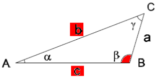
$$a^2 + \underline{c^2} - 2a\underline{c}\,\underline{\cos(\beta)} - \underline{b^2} = 0.$$




Wir betrachten diese Gleichung als eine quadratische Gleichung auf die Unbekannte $a$ (d.h., wir betrachten die Größen, die für beide Dreiecke gleich sind, als bekannt) und zeigen, dass diese Gleichung genau eine positive Lösung hat. Das wird bedeuten, dass die Daten $(c, b, \beta)$ die Seite $a$ eindeutig bestimmen — daraus folgt, dass $a = a'$ und deswegen können wir $SSS-$Satz anwenden.

$$a^2 + \underline{c^2} - 2a\underline{c}\,\underline{\cos(\beta)} - \underline{b^2} = 0.$$

Wir betrachten diese Gleichung als eine quadratische Gleichung auf die Unbekannte $a$ (d.h., wir betrachten die Grössen, die für beide Dreiecke gleich sind, als bekannt).




$A$, $B$, $C$ = Ecken des Dreiecks
$a$, $b$, $c$ = Seiten
$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ = Winkel

Die Diskriminante der Gleichung ist $\mathcal{D} = \underbrace{c^2\cos(\beta)^2}_{>0} - \underbrace{(c^2 - b^2)}_{\leq 0}$ und ist positiv. Dann gibt es zwei Möglichkeiten für $a$:

$$a = c\cos(\beta) + \sqrt{c^2\cos(\beta)^2 - (c^2 - b^2)} \text{ und}$$

$$a = c\cos(\beta) - \sqrt{c^2\cos(\beta)^2 - (c^2 - b^2)}.$$

Da die zweite "Möglichkeit" nicht positiv ist, muss $a = c\cos(\beta) + \sqrt{c^2\cos(\beta)^2 - \underbrace{(c^2 - b^2)}_{\leq 0}}$, also bestimmen die Daten $b, c, \beta$ die Seite $a$ eindeutig.

Dann folgt aus den Voraussetzungen des Satzes die Bedingung $d(C,B) = d(C',B')$. Dann existiert nach SSS-Satz eine eindeutige Isometrie, mit $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $C \mapsto C'$. Diese Isometrie erfüllt auch die Bedingung $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$. $\square$