Plan

- Lotpunkt auf einer Geraden (Im Kapitel Konvexe Geometrie werden wir auch Lotpunkte auf eine beliebeige Menge betrachten).
- Spiegelung
- Anwendung bei Lösungen von elementar-geometrischen Aufgaben

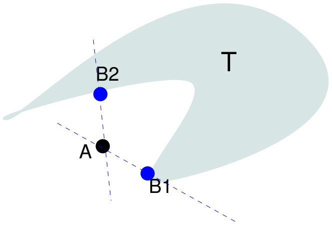
Lot.

Def. Sei $T \subseteq \mathbb{R}^2$ (oder $\mathbb{R}^n$) und $A \in \mathbb{R}^2$. Der Lotpunkt von A auf T ist der Punkt $B \in T$, s.d. der Abstand $d(A, B)$ nicht grösser als der Abstand $d(A, B')$ für alle $B' \in T$ ist:

$$d(A, B) = \inf\{d(A, B') \mid B' \in T\}.$$

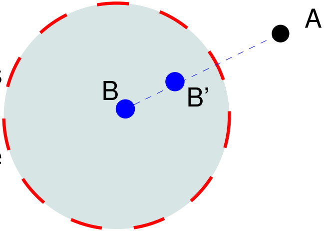
Die Lotgerade von A (bzgl. T) ist die Gerade durch A und $B = Lotpunkt(A)$.

Im allgemeinen Fall ist der Lotpunkt und die Lotgerade nicht eindeutig: Auf dem Bild sehen wir, dass A zwei Lotpunkte bzgl. T hat, B_1 und B_2. Wenn außerdem $A \in T$, ist $A = Lotpunkt(A)$ und jede Gerade durch A ist eine Lotgerade.



Lotpunkt existiert nicht für alle Mengen $T \subseteq \mathbb{R}^2$:

Bsp. Wir betrachten den (offenen) Ball $\mathbf{B}_1(\vec{0}) = \{B \in \mathbb{R}^2 \mid d(\vec{0}, B) < 1\}$ und $A \notin \mathbf{B}_1(\vec{0})$, z.B. $A = \binom{1}{1}$. Dann gibt es keinen Lotpunkt von A auf $\mathbf{B}_1(\vec{0})$, weil es für jeden Punkt $B \in \mathbf{B}_1(\vec{0})$ noch die Punkte der Strecke BA gibt, die in $\mathbf{B}_1(\vec{0})$ liegen. Diese sind näher zu A als B.



Für diese Vorlesung brauchen wir nur den Fall wenn T eine Gerade ist

Fakt (würde in Anwesenheitsaufgaben besprochen; soll in LA I/II bewiesen werden). Sei $L_{A,v}$ eine Gerade. Dann gilt: für einen beliebigen Punkt B genau ein Lotpunkt von B auf $L_{A,v}$ existiert. Dieser ist durch der Formel

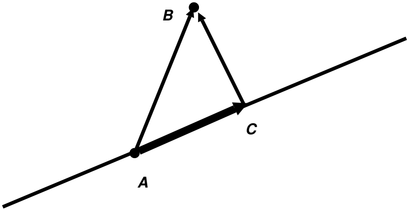
$$C = Lotpunkt(B) = A + \frac{1}{|v|^2}\langle B - A, v\rangle v.$$

gegeben.

Fakt. Sei $L_{A,v}$ eine Gerade. Dann gilt: für einen beliebigen Punkt B genau ein Lotpunkt von B auf $L_{A,v}$ existiert. Dieser ist durch der Formel

$$C = Lotpunkt(B) = A + \frac{1}{|v|^2}\langle B - A, v\rangle v.$$

gegeben.



Wir sehen, dass $C \in L_{A,v}$ liegt, weil wir C die Form $A + t\ v$ hat Der Koeffizient $t = \frac{1}{|v|^2}\langle B - A, v\rangle$ ist so gewählt, dass $\langle C - B, v\rangle = 0$: in der Tat, $\langle C - B, v\rangle = \langle A - B + \frac{1}{|v|^2}\langle B - A, v\rangle v, v\rangle = \langle A - B, v\rangle - \frac{1}{|v|^2}\langle A - B, v\rangle\langle v, v\rangle = 0$.

Beweis vom Fakt. Für jeden anderen Punkt $C + t'v$ der Gerade ($t' \neq 0$) gilt dann

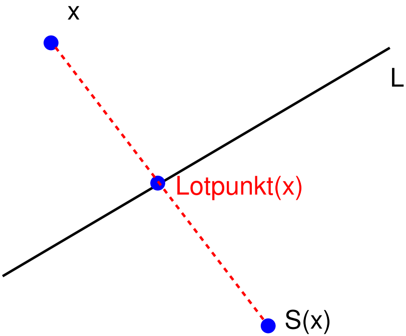
$$d(B, C + t'v)^2 = \langle B - C - t'v, B - C - t'v\rangle \overset{\langle B - C, v\rangle = 0}{=} \langle B - C, B - C\rangle + (t')^2\langle v, v\rangle > d(B, C)^2,$$

also ist der Punkt C tatsächlich (der einzige) Punkt der Geraden $L_{A,v}$, der zum Punkt B am nächsten ist.

Bemerkung. Wir sehen, dass $B - C$ zu v orthogonal ist. Ferner gilt: $C \in L_{A,v}$ ist so gewählt, dass $BC \perp v$ ist. Das ist eine alternative (äquivalente, falls T eine Gerade ist) Definition des Lotpunkts: in einigen Büchern ist Lotpunkt $C \in L_{A,v}$ durch der Bedingungen $C \in L_{A,v}$, $BC \perp v$ definiert.

Spiegelung bzgl. Gerade

Wir betrachten eine Gerade $L = L_{A,v}$. Die Spiegelung bzgl. L ist eine Abbildung $S_L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch die folgende Regel:



Zuerst konstruieren wir zu dem Punkt x den *Lotpunkt*(x) (auf L). Dann

$$S_L(x) = x + 2(Lotpunkt(x) - x)$$

$$= 2Lotpunkt(x) - x.$$

(Man beachte die Ähnlichkeit mit der Punktspiegelung: $P_Z(x) = 2Z - x$).

Unter Berücksichtigung der Formel $Lotpunkt(x) = A + \frac{1}{|v|^2}\langle x - A, v\rangle v$, bekommen wir $S_L(x) = 2A + 2\frac{1}{|v|^2}\langle x - A, v\rangle v - x$.

$$\boxed{S_L(x) = 2A + 2\tfrac{1}{|v|^2}\langle x - A, v\rangle v - x.}$$

Lemma 14. Spiegelung ist eine Isometrie.

Beweis. Beweis mit Kongruenzsätzen ist eine Hausaufgabe. Ich gebe jetzt einen linear-algebraischen Beweis.

$$d(S_L(x), S_L(y)) = d(2A+2\frac{1}{|v|^2}\langle x-A, v\rangle v-x, 2A+2\frac{1}{|v|^2}\langle y-A, v\rangle v-y) =$$

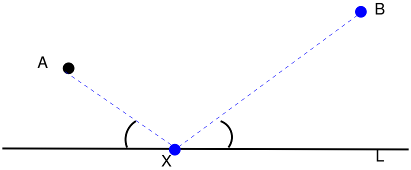
$$= \left|2\frac{1}{|v|^2}\langle x - A, v\rangle v - x - 2\frac{1}{|v|^2}\langle y - A, v\rangle v + y\right| =$$

$$\sqrt{\langle 2\frac{1}{|v|^2}\langle x - y, v\rangle v + y - x, 2\frac{1}{|v|^2}\langle x - y, v\rangle v + y - x\rangle} =$$

$$= \sqrt{4\frac{\langle x - y, v\rangle^2}{|v|^2} - 4\frac{\langle x - y, v\rangle^2}{|v|^2} + \langle x - y, x - y\rangle} = d(x, y).$$

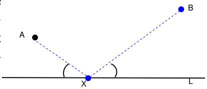
Anwendung von Spiegelsymmetrien zum Lösen von schwierigen Schulaufgaben

Aufgabe. Gegeben seien zwei Punkte A, B und eine Gerade L. Man konstruiere (mit Zirkel und Lineal) einen Punkt $X \in L$, s.d. die Winkel zwischen AX und der Geraden und zwischen BX und der Geraden gleich sind.



Lösung

Aufgabe. Gegeben seien zwei Punkte A, B und eine Gerade L. Man konstruiere (mit Zirkel und Lineal) einen Punkt $X \in L$, s.d. die Winkel zwischen AX und der Geraden und zwischen BX und der Geraden gleich sind.



Man konstruiere den Punkt B', der zu B bzgl. L spiegelsymmetrisch ist. Der Schnittpunkt der Gerade durch A, B mit L ist der gesuchte Punkt X, weil die Spiegelung von Δ_{XTB} das Dreieck $\Delta_{XTB'}$ ist, und deswegen alle auf dem Bild markierten Winkel gleich sind.