Plan

- Drehung
- Anwendung bei Lösen von elementargeometrischen Aufgaben
- Verkettung von Drehungen und Anwendung bei elementargeometrischen Aufgaben

Drehung um einen Punkt um Winkel α.

Sei $A \in \mathbb{R}^2$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Drehung um A um Winkel α ist eine Abbildung $D_A(\alpha) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ welche wie folgt definiert ist:

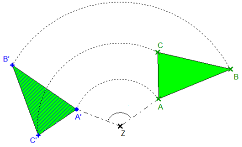
$$D_A(\alpha) = T_A \circ D_{\vec{0}}(\alpha) \circ T_{(-A)},$$

wobei die Abbildung $D_{\vec{0}}(\alpha)$ die Multiplikation mit der Drehmatrix $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ ist: $D_{\vec{0}}(x) = D(\alpha)x$.

Bemerkung. Die Bezeichnungen $D_A(\alpha)$ und $D_{\vec{0}}(\alpha)$ sind kompatibel: wenn wir in der Definition von $D_A(\alpha)$ als Punkt A den Punkt $\vec{0}$ nehmen, bekommen wir tatsächlich die Multiplikation mit der Drehmatrix.

Bemerkung. Drehung ist eine Isometrie, weil sie die Verkettung von drei Isometrien ist. Wir werden die Darstellung von $D_A(\alpha)$ in der Form $Ox + v$ später ausrechnen.

Wir werden jetzt zeigen, dass die Abbildung $D_A(\alpha)$ tatsächlich die erwarteten Eigenschaften einer Drehung um A erfüllt, und dann noch kommentieren warum wir die Drehung nicht geometrisch sondern algebraisch definiert haben.



Aussage 1. Die Drehung $D_A(\alpha)$ hat den Fixpunkt A. Ferner gilt, ist $\alpha \notin \{360° \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, so ist A der einzige Fixpunkt von $D_A(\alpha)$.

$X \in \mathbb{R}^2$ ist Fixpunkt einer Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, wenn $f(X) = X$.

$D_A(\alpha) = T_A \circ D_{\vec{0}}(\alpha) \circ T_{(-A)}$

Beweis.

$$D_A(\alpha)(A) = T_A \circ D_{\vec{0}}(\alpha) \circ T_{(-A)}(A)$$

$$= T_A \circ D_{\vec{0}}(\alpha)(\vec{0}) = T_A(\vec{0}) = A.$$

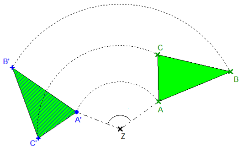
Also ist A ein Fixpunkt.
Angenommen, $D_A(\alpha)$ hat noch einen Fixpunkt $B \neq A$. Wir betrachten den Punkt $T_{(-A)}(B) = B - A$.
Es gilt, $T_{(-A)}(B) \neq \vec{0}$, und

$$T_{(-A)}(B) = T_{(-A)} \circ D_A(\alpha)(B) = T_{(-A)} \circ T_A \circ D_{\vec{0}}(\alpha) \circ T_{(-A)}(B)$$

$$= D_{\vec{0}}(\alpha) \circ T_{(-A)}(B) = D_{\vec{0}}(\alpha)(B - A) = D(\alpha)(B - A).$$

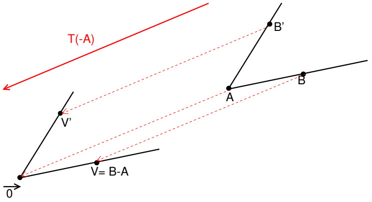
Also ist $B - A$ ein Eigenvektor der Matrix $D(\alpha)$. Die Matrix $D(\alpha)$ hat aber keine (reellen) Eigenvektoren, da das charakteristische Polynom von $D(\alpha)$ keine reellen Nullstellen hat.

Aussage 2. Für jedes $B \neq A$ gilt: $\cos(\langle BAB') = \cos(\alpha)$, wobei $B' = D_A(\alpha)(B)$.



Bemerkung. Die Bedingung $\cos(\langle BAB') = \cos(\alpha)$ bedeutet, dass $\alpha = 360 \cdot k \pm \langle BAB'$ ist. Wir haben in der Definition von $D_A(\alpha)(B)$ nicht verlangt, dass $\alpha \in [0, \pi]$, z.B. sind die Drehungen um die Winkel $350°$ bzw. $-10°$ erlaubt.

Aussage 2. Für jedes $B \neq A$ gilt: $\cos(\langle BAB') = \cos(\alpha)$, wobei $B' = D_A(\alpha)(B)$.



Beweis. Wir wenden $T_{(-A)}$ auf die Punkte A, B, B' an und bekommen $\vec{0} = T_{(-A)}(A)$, $B - A = T_{(-A)}(B)$, $D(\alpha)(B - A) = T_{(-A)}(B')$. Wir nennen $B - A = V$ und $D(\alpha)(B - A) = V'$.

Da $T_{(-A)}$ eine Isometrie ist, ist das Winkelmaß $\langle BAB'$ gleich dem Winkelmaß $\langle V\vec{0}V'$.

Der Winkel VAV' ist die Vereinigung von Halbgeraden $H_{\vec{0},V}$ und $H_{\vec{0},V'}$.

Wenn

$V = \begin{pmatrix} r\cos(\beta) \\ r\sin(\beta) \end{pmatrix}$ ist (dass solche r, β existieren, haben wir im Beweis von Aussage 1 in Vorl. 4 gezeigt), ist

$$V' = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\cos(\beta) \\ r\sin(\beta) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$$

Warum haben wir die Drehung nicht rein metrisch definiert?

Wir haben die Spiegelung und Punktspiegelung mit Hilfe von "metrischen" Begriffen definiert, d.h., jede Isometrie bildet die Objekte, die wir verwendet haben (Strecke, Gerade, Abstand), auf Objekte derselben Art ab.

Obwohl wir die Translation algebraisch definiert haben, ist es möglich, sie rein metrisch zu definieren. Das bekommen Sie als Hausaufgabe.

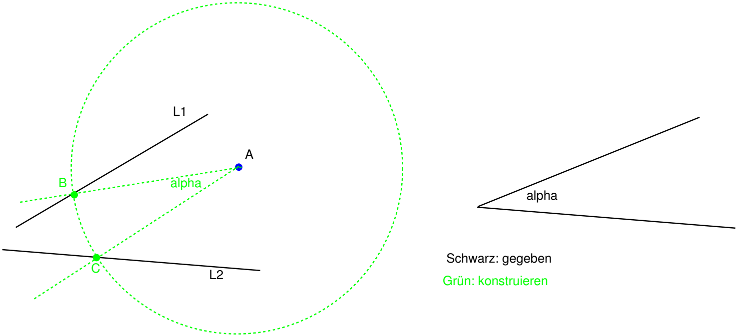
In der Definition der $\alpha-$ Drehung um A haben wir eine linear-algebraische Definition gewählt: die Drehung wurde durch eine Formel definiert. Warum?

Weil man die $\alpha-$Drehung rein metrisch nicht (eindeutig) definieren kann. Die Drehungen um die Winkel α und $-\alpha$ sind metrisch nicht unterscheidbar.

Um eine Drehung geometrisch zu definieren benötigen wir zusätzliche Strukturen, z.B. Orientation auf $\mathbb{R}^2$, siehe z.B.
`http://users.fmi.uni-jena.de/~matveev/Lehre/LA09_10/vorlesung12_handout.pdf` (Seiten 46-47)

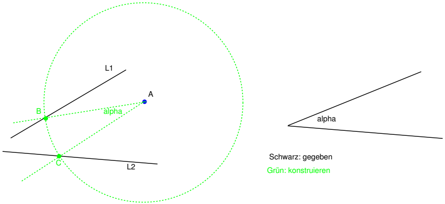
Wir benutzen jetzt Drehungen, um einige schwierige elementargeometrische Aufgaben zu lösen.

Analog dazu wie wir es mit Spiegelungen und Punktspiegelungen gemacht haben, werden wir ein Teil der gegebenen Objekte bzgl. einem Punkt drehen - die Aufgabe wird dadurch viel einfacher.

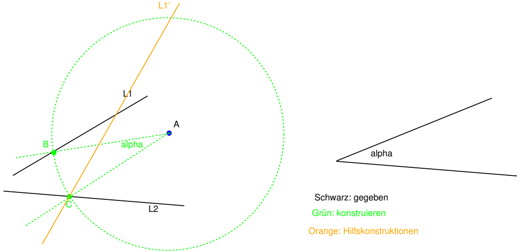


Aufgabe. Gegeben sind zwei Geraden L_1 und L_2, ein Punkt A und ein Winkel α. Konstruiere einen Kreis mit Mittelpunkt A, s.d. das Winkelmaß $\langle BAC$, wobei B und C die Schnittpunkte der Geraden L_1 bzw. L_2 mit dem Kreis sind, gleich dem Winkelmaß von α ist.

Lösung



Aufgabe. Gegeben sind zwei Geraden L_1 und L_2, ein Punkt A und ein Winkel α. Konstruiere einen Kreis mit Mittelpunkt A, s.d. das Winkelmaß $\langle BAC$, wobei B und C die Schnittpunkte der Geraden L_1 bzw. L_2 mit dem Kreis sind, gleich dem Winkelmaß von α ist.



Lösung. Wir drehen die Gerade L_1 um den Punkt A um den Winkel (bzw. das Winkelmaß von) α. Das Bild davon ist eine Gerade (da die Drehung eine Isometrie ist); um diese Gerade zu bestimmen, können wir zwei Punkte von L_1 auswählen, davon die Bilder bzgl. der Drehung mit Zirkel/Lineal konstruieren, und anschließend die Gerade durch diese Punkte ziehen.

Der Schnittpunkt mit L_2 ist dann der gesuchte Punkt C. Der Kreis um A mit Radius AC ist dann der gesuchte Kreis, weil vermöge der Drehung $B \mapsto C$, und deswegen $\langle BAC = \langle\alpha$.

Verkettung von Drehungen.

Lemma 15. Die Verkettung von zwei Drehungen (um möglicherweise verschiedene Punkte) um Winkel α bzw. β, s.d. $\alpha + \beta \notin \{k \cdot 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ist eine Drehung um den Winkel $\alpha + \beta$. Die Verkettung von zwei Drehungen, s.d. $\alpha + \beta = k \cdot 360^\circ$ ist eine Translation.

Bsp. Eine Punktsspiegelung ist eine Drehung um den Winkel 180°. Wenn wir zwei Punktspiegelungen verknüpfen, bekommen wir nach Lemma 12 eine Translation, was auch nach Lemma 15 der Fall sein soll, da $180 + 180 = 360$.

Lemma 15. Die Verkettung von zwei Drehungen (um möglicherweise verschiedene Punkte) um Winkel α bzw. β, s.d. $\alpha+\beta \notin \{k \cdot 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ist eine Drehung um den Winkel $\alpha+\beta$. Die Verkettung von zwei Drehungen, s.d. $\alpha+\beta = k \cdot 360^\circ$ ist eine Translation.

Beweis. Wie wir es im Beweis von Lemma 12 ausgerechnet haben, bekommen wir bei einer Verkettung von Isometrien $I(x) = Ox + b$ und $I'(x) = O'x + b'$,

$$I \circ I'(x) = O(O'x + b') + b = \underbrace{OO'}_{\tilde{O} \in O_2} x + \underbrace{Ob' + b}_{\tilde{b}}.$$

(Die zur Verkettung von Isometrien gehörige Matrix ist das Produkt der zu den Isometrien gehörigen Matrizen.)

Wenn wir eine $\alpha-$Drehung haben, ist die zugehörige Matrix O die Drehmatrix $D(\alpha)$:

$$T_A \circ D_{\vec{0}}(\alpha) \circ T_{(-A)}(x) = D(\alpha)(x - A) + A = D(\alpha)x - D(\alpha)A + A.$$

Wenn wir also zwei Drehungen (um α und β) verketten, bekommen wir eine Isometrie mit der Matrix

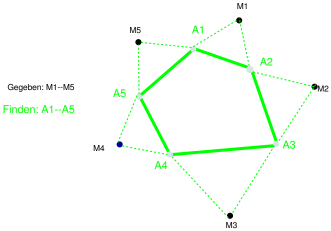
$$D(\beta)D(\alpha) = D(\alpha+\beta) \text{ also eine Isometrie der Form } x \mapsto D(\alpha+\beta)x+v.$$

Ist $\alpha + \beta = 360 \cdot k$, so ist $D(\alpha+\beta) = Id$ und die Verkettung von Drehungen ist eine Translation.

Falls $\underbrace{\alpha+\beta}_{\gamma} \notin \{k \cdot 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ist, müssen wir zeigen, dass ein A existiert, s.d. $D(\gamma)x + v = D(\gamma)x - D(\gamma)A + A$ für alle x und für irgendeinen Punkt A. Diese Gleichung kann man äquivalent umformen zu $(D(\gamma) - Id)A = v$. Da $D(\gamma)$ keine reellen Eigenwerte hat, ist $(D(\gamma) - Id)$ nichtausgeartet, und deswegen existiert eine Lösung A, nämlich $(D(\gamma) - Id)^{-1}v$. $\square$

Elementargeometrische Aufgabe, die mit Hilfe der Verkettung von Drehungen gelöst werden kann.

Aufgabe. Gegeben sind die Punkte $M_1, ..., M_n \in \mathbb{R}^2$. Man konstruiere mit Zirkel/Lineal ein n-Eck $A_1, ..., A_n$, s.d. die Dreiecke $A_i M_i A_{i+1}$ und $A_n M_n A_1$ gleichseitig sind.



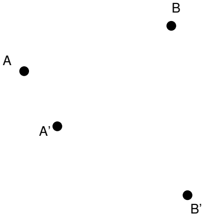
Lösung. Wir betrachten die Verkettung
$D_{M_n}(60^\circ) \circ \cdots \circ D_{M_1}(60^\circ) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Das ist eine Drehung um $n \cdot 60^\circ$ bzw. eine Translation, wenn $n \cdot 60^\circ = k \cdot 360^\circ$ ist.
Diese Verkettung $D_{M_n}(60^\circ) \circ \cdots \circ D_{M_1}(60^\circ)$ bildet A_1 auf A_1 ab (wenn die Dreiecke wie auf dem Bild platziert sind):

$$A_1 \xmapsto{D_{M_1}(60^\circ)} A_2 \xmapsto{D_{M_2}(60^\circ)} A_3 \longmapsto \cdots \longmapsto A_{n-1} \xmapsto{D_{M_{n-1}}(60^\circ)} A_n \xmapsto{D_{M_n}(60^\circ)} A_1.$$

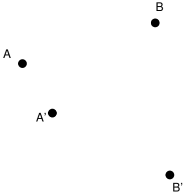
Also ist A_1 der Fixpunkt von $D_{M_n}(60^\circ) \circ \cdots \circ D_{M_1}(60^\circ)$. Wenn $n \cdot 60^\circ \notin \{k \cdot 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$, dann ist der Fixpunkt der Drehung der gesuchte Punkt A_1. Wie findet man den Fixpunkt einer Drehung?

Wie findet man den Fixpunkt einer Drehung?

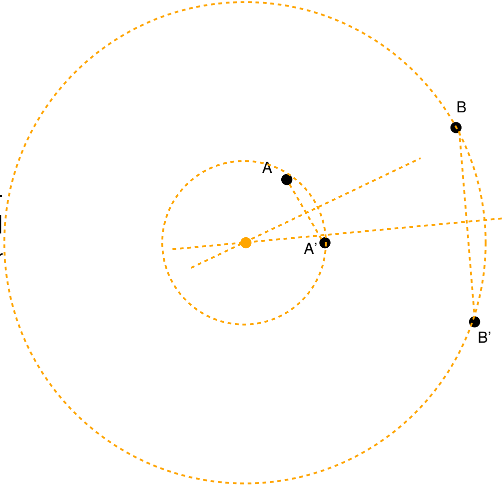
Hilfsaufgabe. Eine Drehung bildet $A \mapsto A'$ und $B \mapsto B'$ ab. Finde das Zentrum der Drehung.



Hilfsaufgabe. Eine Drehung bildet $A \mapsto A'$ und $B \mapsto B'$ ab. Finde das Zentrum der Drehung.

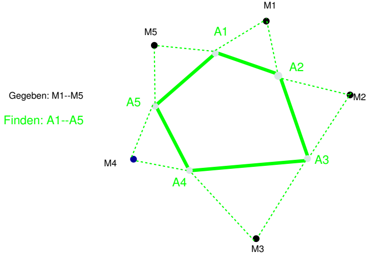


Lösung. Man konstruiert die Mittelsenkrechten zu den Strecken AA' und BB'. Der Schnittpunkt davon ist der Mittelpunkt der Drehung.



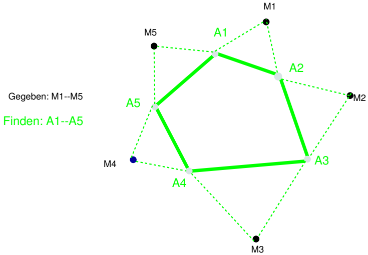
Zurück zur alten Aufgabe.

Aufgabe. Gegeben sind die Punkte $M_1, \ldots, M_n \in \mathbb{R}^2$. Man konstruiere mit Zirkel/Lineal ein n-Eck $A_1, \ldots, A_n$, s.d. die Dreiecke $A_i M_i A_{i+1}$ und $A_n M_n A_1$ gleichseitig sind.



Man nimmt zwei beliebige Punkte $C \neq D$, dreht sie (mit Zirkel/Lineal) um M_1 um 60° (bekommt C', D'), dreht das Ergebnis um M_2 um 60° (bekommt C'', D'') u.s.w. Nach n Schritten bekommt man $C^{(n)}, D^{(n)}$. Aus der Überlegung eben wissen wir, dass man $C^{(n)}, D(n)$ aus C, D mit Hilfe <u>einer</u> Drehung bekommen kann, und das Zentrum der Drehung ist der gesuchte Punkt A_1. Man konstruiert ihn wie in der Hilfsaufgabe; den Punkt A_2 bekommt man, wenn man den Punkt A_1 um M_1 um 60° dreht u.s.w.

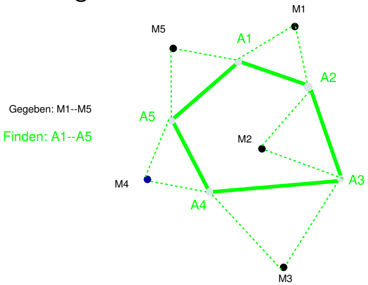
Was wenn $n \cdot 60^\circ = 360 \cdot k$?



Dann ist die Abbildung

$D_{M_n}(60^\circ) \circ \cdots \circ D_{M_1}(60^\circ)$ eine Translation. Wenn Sie einen beliebigen Punkt C nicht auf sich selber abbildet, dann hat sie keinen Fixpunkt. Der Punkt A_1 muss aber ein Fixpunkt sein. Also ist das Problem nicht lösbar, zumindest wenn alle Dreiecke wie auf dem Bild ausserhalb des $n - Eck$ liegen.

In der Aufgabe haben wir nicht verlangt, dass die Punkte $M_1, ..., M_n$ innerhalb der gesuchten $A_1 ..., A_n$ liegen. Die folgende Lösung ist also zulässig.



Um so eine Lösung zu konstruieren, muss man anstelle $D_{M_2}(60^\circ)$ die Drehung $D_{M_2}(-60^\circ)$ benutzen; die anderen Ideen der Konstruktion sind dieselben.