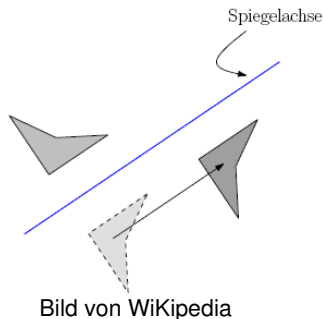


- ▶ Ziel: Klassifikationssatz für Isometrien (Satz 2)
Vorher:
 - ▶ Gleitspiegelung
- ▶ Wenn die Zeit erlaubt, auch Ähnlichkeitstransformationen (Vorlesung5d)

“Gleitspiegelung” und Verkettungen von Spiegelung und Parallelverschiebung

Def. Eine Gleitspiegelung ist eine Spiegelung an einer Geraden (Spiegelachse) verknüpft mit einer Translation parallel zu dieser Geraden: $GS : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,
 $GS_{A,v,\lambda} = T_{\lambda v} \circ S_{L_{A,v}}$.
Wir erlauben $\lambda = 0$, also ist eine Spiegelung auch eine Gleitspiegelung.



Eine Gleitspiegelung ist eine Isometrie als Verkettung von zwei Isometrien.

Die linear-algebraische Formel für eine Gleitspiegelung kann man aus der Formel für die Spiegelung ableiten:

$$S_L(x) = 2A + 2\frac{1}{|v|^2}\langle x - A, v \rangle v - x.$$

Es gilt dann:

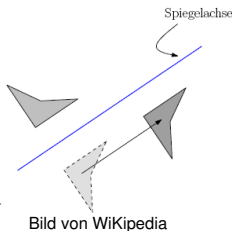
$$GS_{A,v,\lambda}(x) = T_{\lambda v}(S_L(x)) = 2A + \lambda v + 2\frac{1}{|v|^2}\langle x - A, v \rangle v - x.$$

Def. Eine Gleitspiegelung ist eine Spiegelung an einer Geraden (Spiegelachse) verknüpft mit einer Translation parallel zu dieser Geraden: $GS : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$GS_{A,v,\lambda} = T_{\lambda v} \circ S_{L,A,v}.$$

Wir erlauben $\lambda = 0$, also ist eine Spiegelung auch eine Gleitspiegelung. Eine Gleitspiegelung ist eine Isometrie als Verkettung von zwei Isometrien. Es gilt:

$$GS_{A,v,\lambda}(x) = T_{\lambda v}(S_L(x)) = 2A + \lambda v + 2 \frac{1}{|v|^2} \langle x - A, v \rangle v -$$



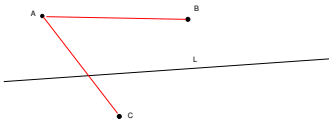
Es ist anschaulich (und einfach zu beweisen), dass die Gleitspiegelung $GS_{A,v,\lambda}(x)$ mit $\lambda \neq 0$ keine Fixpunkte hat. In der Tat, die Punkte einer Halbebene (ohne die Gerade) werden auf die andere Seite abgebildet und können deswegen keine Fixpunkte sein. Die Punkte der Geraden sind **die Fixpunkte** von $S_L(x)$ und werden deswegen nur $T_{\lambda v}$ -verschoben, d.h., für jedes $x \in L$ ist

$$GS_{A,v,\lambda}(x) = T_{\lambda v}(S_L(x)) = T_{\lambda v}(x) \stackrel{\text{für } \lambda \neq 0}{\neq} x,$$

also sind sie auch keine Fixpunkte von GS .

Bemerkung/Versprechen aus Vorlesung 2d (Seite 11). Was bedeutet es, dass die Punkte auf einer Seite von L bzw. auf verschiedenen Seiten von L liegen?

Def. Die Punkte $A, B \notin L$ liegen **auf einer Seite der Geraden L** , falls die Strecke AB die Gerade L nicht schneidet. Auf dem Bild liegen A und B auf einer Seite, und A und C auf verschiedenen Seiten.

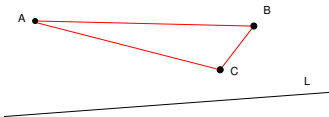


Aussage. Die Bedingung "auf einer Seite von L liegen" ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Symmetrie und Reflexivität (aus der Def. von Äquivalenzrelation) sind offensichtlich:

- ▶ Symmetrie: wenn die Strecke AB die Gerade L nicht schneidet, schneidet auch die Strecke BA die Gerade nicht.
- ▶ Reflexivität: Ist $A = B$, so besteht die Strecke AB aus einem einzigen Punkt und schneidet die Gerade L nicht.

Transitivität bedeutet in diesem Fall die folgende Aussage: wenn A und B auf einer Seite liegen und B und C auf einer Seite liegen, dann liegen A und C auch auf einer Seite. Wir erklären/beweisen sie auf der nächsten Seite.



Die Bedingung “auf einer Seite von L liegen” ist transitiv

Man kann Transitivität mit Hilfe der Gleichung-Darstellung der Geraden bekommen: Aus LA sollte es Ihnen bekannt sein, dass man in Dim. 2 jede Gerade als Lösungsmenge der Gleichung $ax + by - c = 0$ darstellen kann (wobei $(a, b) \neq (0, 0)$):

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid ax + by - c = 0 \right\}. \quad (*)$$

Ich wiederhole die Argumentation aus LA: für die Gerade $L_{A,v} = \{A + t \cdot v \mid t \in \mathbb{R}\}$ betrachten wir $a := v_2$, $b := -v_1$ und $c = A_1 v_2 - A_2 v_1$. Dann ist die Gleichung von (*)

$$v_2 x - v_1 y - (A_1 v_2 - A_2 v_1) = 0 \quad (**).$$

Diese Gleichung ist erfüllt für alle Punkte der Gerade, denn Einsetzen von $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 + tv_1 \\ A_2 + tv_2 \end{pmatrix}$ in (**) liefert $v_2(A_1 + tv_1) - v_1(A_2 + tv_2) - (A_1 v_2 - A_2 v_1) = 0$. Damit haben wir gezeigt, dass jeder Punkt von $L_{A,v}$ in (*) liegt. In die andere Richtung, die Menge (*) ist eine Lösung $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ plus alle Lösungen der homogenen Gleichung $v_2 x - v_1 y = 0$, welche genau die Vektoren der Form $t \cdot v$ sind.

Dann gilt: die Punkte $A = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ liegen auf einer Seite von L , wenn die Zahlen $ax_1 + by_1 - c$ und $ax_2 + by_2 - c$ gleiches Vorzeichen haben.

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid ax + by - c = 0 \right\}.$$

Dann gilt: die Punkte $A = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ liegen auf einer Seite von L , wenn die Zahlen $ax_1 + by_1 - c$ und $ax_2 + by_2 - c$ gleiches Vorzeichen haben.

In der Tat, wir parametrisieren die Strecke AB wie in der Definition der Strecke:

$$AB = \left\{ t \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + (1 - t) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \mid 0 \leq t \leq 1 \right\}.$$

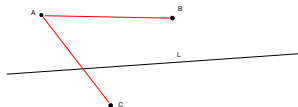
Wenn wir die Koordinaten des Punkts $t \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + (1 - t) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ in die Formel $ax + by - c$ einsetzen, bekommen wir den folgenden Ausdruck in t :

$$a((1 - t)x_2 + tx_1) + b((1 - t)y_2 + ty_1) - c = (1 - t)(ax_2 + by_2 - c) + t(ax_1 + by_1 - c) \quad (*)$$

Wir sehen, dass wenn $(ax_2 + by_2 - c)$ und $(ax_1 + by_1 - c)$ gleiches Vorzeichen haben, für alle $t \in [0, 1]$ hat der Ausdruck $(*)$ auch das gleiche Vorzeichen und deswegen ist für keinen Punkt der Strecke die Gleichung $ax + by - c = 0$ erfüllt. Deswegen liegt kein Punkt auf der Geraden. Haben die Punkte der Strecke verschiedene Vorzeichen, so gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $t \in [0, 1]$, sodass der entsprechende Punkt die Gleichung $ax + by - c = 0$ erfüllt und somit auf der Geraden liegt.

Deswegen gilt: liegen A und B auf einer Seite der Geraden (also haben A und B eingesetzt in $ax + by - c$ gleiches Vorzeichen), und B und C auf einer Seite der Geraden (also haben B und C eingesetzt in $ax + by - c$ gleiches Vorzeichen), so haben A und C eingesetzt in $ax + by - c$ gleiches Vorzeichen und liegen deswegen auf einer Seite der Geraden.

Def. Die Punkte $A, B \notin L$ liegen **auf einer Seite der Geraden L** , falls die Strecke AB die Gerade L nicht schneidet. Auf dem Bild liegen A und B auf einer Seite, und A und C auf verschiedenen Seiten.



Aussage. Die Bedingung "auf einer Seite von L liegen" ist eine Äquivalenzrelation.

Def. Äquivalenzklassen bezüglich dieser Äquivalenzrelation heißen **(offene) Halbebenen**.

Aus algebraischen Überlegungen im Beweis der Aussage wissen wir, dass in Koordinaten eine Halbebene durch die Bedingung $ax + by - c > 0$ charakterisiert ist, und die andere durch $ax + by - c < 0$, wobei die Gerade durch die Gleichung $ax + by - c = 0$ gegeben ist.

Verkettung von Gleitspiegelung und Translation.

Lemma 16. Verkettung von Gleitspiegelung und Translation oder von Translation und Gleitspiegelung ist eine Gleitspiegelung.

$$GS_{A,v,\lambda}(x) = T_{\lambda v}(S_L(x)) = 2A + \lambda v + 2 \frac{1}{|v|^2} \langle x - A, v \rangle v - x.$$

Beweis. Mit Gewalt ausrechnen: wir verketteten $GS_{A,v,\lambda}$ und T_u . Wir zerlegen auch u in die Summe $u = v' + v^\perp$, wobei v' proportional zu v ist und v^\perp orthogonal zu v ist – immer möglich in Dim. 2.

$$\begin{aligned} GS_{A,v,\lambda} \circ T_u(x) &= 2A + \lambda v + 2 \frac{1}{|v|^2} \underbrace{\langle (x + v' + v^\perp) - A, v \rangle}_{T_u(x)} v - \underbrace{(x + v' + v^\perp)}_{T_u(x)} \\ &= 2 \underbrace{(A - \frac{1}{2}v^\perp)}_{A'} + \lambda v - v' + 2 \frac{\langle v', v \rangle}{|v|^2} v + 2 \frac{1}{|v|^2} \underbrace{\langle x - (A - \frac{1}{2}v^\perp), v \rangle}_{A'} v - x = GS_{A',v,\lambda'} \end{aligned}$$

Beweis für $T_u(x) \circ GS_{A,v,\lambda}$ ist analog und ist einfacher. □

Verkettung von Gleitspiegelung und Drehung ist eine Gleitspiegelung

Lemma 17. Die Verkettung von einer Gleitspiegelung und einer Drehung in beliebiger Reihenfolge ergibt eine Gleitspiegelung.

Zuerst eine Bemerkung. Man kann das Lemma durch Ausrechnen beweisen, etwa wie wir das Lemma 16 bewiesen haben. Man kann das Ausrechnen vereinfachen, wenn wir auf bereits erworbenes Wissen zurückgreifen.

Wir betrachten $GS_{A,v,\lambda} \circ D_A(\alpha)$. Wir ersetzen $GS_{A,v,\lambda}$ durch $S_{L(A,v)} \circ T_{\lambda v}$. Dann ist $GS_{A,v,\lambda} \circ D_A(\alpha) = S_{L(A,v)} \circ \underbrace{T_{\lambda v} \circ D_A(\alpha)}_{\text{Drehung}}$.

Die Verkettung von Spiegelung und Drehung muss man immer noch ausrechnen, es ist aber einfacher.

Auch den Fall $D_A(\alpha) \circ GS_{A,v,\lambda}$ kann man zur Verkettung von Spiegelung und Drehung reduzieren, denn $T_{\lambda v} \circ S_{L(A,v)} = S_{L(A,v)} \circ T_{\lambda v}$.

Auf der nächsten Seite gebe ich einen anderen Beweis, welcher auf der Klassifikation von orthogonalen 2×2 Matrizen beruht.

Beweis von Lemma 17.

Wir erinnern uns: die Verkettung von $I(x) = Ox + v$ und $I'(x) = O'x + v'$ ist eine Isometrie, sodass die Matrix gleich OO' ist.

In Fall einer Spiegelung, hat die zugehörige Matrix O einen Eigenvektor mit Eigenwert 1 (für $S_{A,v}$ ist v so ein Vektor; folgt z.B. aus der Formel für die Spiegelung) und einen Vektor mit Eigenwert -1 (ein beliebiger Vektor $v^\perp \neq \vec{0}$, welcher orthogonal zu v ist).

Insb. ist die Determinante von O gleich -1 . Die Matrix O' ist in diesem Fall eine Drehmatrix; die Determinante ist 1. Also ist die Determinante von OO' gleich -1 , deswegen die Matrix OO' eine $S_\beta = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix}$ Matrix ist.

Deswegen reicht es wenn wir zeigen: eine Isometrie $x \mapsto Ox + b$, sodass die Matrix O eine S_β -Matrix ist, ist eine Gleitspiegelung.

Wir wissen dass $x \mapsto Ox$ eine Spiegelung ist; die Abbildung $x \mapsto Ox + b$ ist die Verkettung von Spiegelung und Translation und ist eine Gleitspiegelung nach Lemma 16.