Klassifikationssatz für Isometrien von $\mathbb{R}^2$

Ein Punkt x heißt Fixpunkt einer Isometrie f, wenn $f(x) = x$.

Satz 2. Es gilt:

1. Hat eine Isometrie f des $\mathbb{R}^2$ drei Fixpunkte, welche nicht auf einer Geraden liegen, so ist $f = Id$.
2. Hat eine Isometrie genau einen Fixpunkt, so ist f eine Drehung bzgl. diesem Fixpunkt.
3. Hat eine Isometrie mind. zwei Fixpunkte $A \neq B$ und ist sie nicht die Identitätsabbildung, so ist sie eine Spiegelung bzgl. der Geraden $L(A, B)$.
4. Hat eine Isometrie keine Fixpunkte, so ist sie eine Gleitspiegelung $GS_{A,v,\lambda}$ mit $\lambda \neq 0$ oder eine Translation T_v mit $v \neq \vec{0}$.

Aus Satz 2 folgt, dass jede Isometrie des $\mathbb{R}^2$ eine Drehung, Spiegelung, Gleitspiegelung oder Translation ist.

Beweis von Teil 1 (des Satzes 2)

$\boxed{\text{Hat eine Isometrie } f \text{ des } \mathbb{R}^2 \text{ drei Fixpunkte, welche nicht auf einer Geraden liegen, so ist } f = Id.}$

Das folgt aus Satz 1 und LA (bzw. aus dem Crashkurs über affine Abbildungen, Vorl. 3b, Seiten 11-12).

Angenommen, f ist eine Isometrie des $\mathbb{R}^2$, s.d. $A \mapsto A$, $B \mapsto B$, und $C \mapsto C$, wobei die Punkte A, B, C nicht auf einer Geraden liegen.

Aus Satz 1 wissen wir, dass jede Isometrie eine affine Abbildung ist. Aus LA (alternativ: Vorl. 3b, Seiten 11-12) wissen wir, dass in $\mathbb{R}^2$ die Bilder von drei Punkten, welche nicht auf einer Geraden liegen, die affine Abbildung eindeutig bestimmen.

Also gibt es höchsten eine Isometrie f mit $A \mapsto A$, $B \mapsto B$, und $C \mapsto C$. Da die Isometrie Id dasselbe leistet, ist $Id = f$. $\square$

Beweis von Teil 3

Hat eine Isometrie f mind. zwei Fixpunkte $A \neq B$ und ist sie nicht die Identitätsabbildung, so ist sie eine Spiegelung bzgl. der Geraden $L(A, B)$.

Angenommen $f(A) = A$ und $f(B) = B$. Wir betrachten einen Punkt $C \notin L(A, B)$ und setzen $C' := f(C)$. Wenn $C' = C$ ist, wäre f die Identitätsabbildung wie wir es schon im bereits bewiesenen Teil 1 des Satzes erklärt haben. Somit ist $C \neq C'$ und wir betrachten die Spiegelung bzgl. $L(A, B)$.

Die Verkettung $S_{L(A,B)} \circ f$ ist eine Isometrie mit $A \mapsto A$ und $B \mapsto B$. Außerdem bildet sie $C \mapsto C$ ab, denn: Sowohl C als auch C' liegen auf den Kreisen $\{X \in \mathbb{R}^2 \mid d(X, A) = d(A, C)\}$ und $\{X \in \mathbb{R}^2 \mid d(X, B) = d(B, C)\}$. Da unterschiedliche Kreise höchstens 2 Schnittpunkte haben, gibt es keine weitere Schnittpunkte.

Anderseits muss aber auch $S_{L(A,B)}(C)$ auf beiden Kreisen liegen, denn $d(S_{L(A,B)}(C), A) = d(S_{L(A,B)}(C), S_{L(A,B)}(A)) = d(C, A)$ und analog $d(S_L(A, B)(C), B) = d(C, B)$. Somit muss $S_{L(A,B)}(C) = C$ oder $S_{L(A,B)}(C) = C'$ gelten. Ersteres ist nicht möglich, da $C \neq L(A, B)$.

Wegen $S_{L(A,B)}^{-1} = S_{L(A,B)}$ folgt: $S_{L(A,B)} \circ f(C) = S_{L(A,B)}(C') = C$. Nach Teil 1 ist also $S_{L(A,B)} \circ f = Id$ und letztlich $S_{L(A,B)} = f$. $\square$

Beweis von Teil 2

> Hat eine Isometrie f genau einen Fixpunkt, so ist sie eine Drehung bzgl. diesem Fixpunkt.

Sei A der Fixpunkt. Wir betrachten einen Punkt B mit $d(A, B) = 1$. Sei $B' := f(B)$. Da die Punkte B und B' auf dem Kreis $K_1(A) = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid d(X, A) = 1\}$ liegen, existiert eine Drehung $D_A(\alpha)$, die $B' \mapsto B$, nämlich für $\alpha = \langle B'AB$ oder für $\alpha = 360° - \langle B'AB$.

Dann hat $D_A(\alpha) \circ f$ mind. 2 Fixpunkte: A und B. Dann ist nach bereits bewiesenen Teilen $D_A(\alpha) \circ f = Id$ oder $D_A(\alpha) \circ f = S$ (wobei S eine Spiegelung bzgl. einer Geraden ist).

Im ersten Fall ist $f = D_A(-\alpha)$. Im zweiten Fall wäre $f = D_A(-\alpha) \circ S$. Da aber $D_A(-\alpha) \circ S$ nach Lemma 17 eine Gleitspiegelung ist, kann sie nicht genau einen Fixpunkt haben. □

Beweis von Teil 4

> Hat eine Isometrie keine Fixpunkte, so ist sie eine Gleitspiegelung $GS_{A,v,\lambda}$ mit $\lambda \neq 0$ oder eine Translation T_v mit $v \neq \vec{0}$.

Sei $A' := f(A)$. Wir betrachten $T_{(A-A')} \circ f$. A ist ein Fixpunkt von $T_{(A-A')} \circ f$.

Wenn A der einzige Fixpunkt von $T_{(A-A')} \circ f$ wäre, wäre $T_{(A-A')} \circ f = D_A(\alpha)$ für ein $\alpha \notin \{k \cdot 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Dann ist $f = T_{(A'-A)} \circ D_A(\alpha)$. Die Verkettung von einer Translation und einer nicht-identischen Drehung ist aber eine Drehung. Letztere Aussage wird auf der nächsten Seite erklärt.

Da eine Drehung immer Fixpunkte hat, erfüllt die Abbildung f nicht die Voraussetzung "f hat keine Fixpunkte" und somit kann A nicht der einzige Fixpunkt von $T_{(A-A')} \circ f$ sein.

Dann ist $T_{(A-A')} \circ f$ eine Spiegelung oder eine Identitätsabbildung. Im ersten Fall ist f eine Gleitspiegelung nach Lemma 16, und im zweiten Fall ist f eine Translation. $\square$

Warum ist die Verkettung von nicht-identischer Drehung und Translation eine Drehung?

Wir betrachten $T_v \circ D_A(\alpha)$, wobei $\alpha \notin \{k \cdot 180^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Wir haben in den Hausaufgaben und auch in Lemma 12 gesehen, dass $T_v = P_{\vec{0}} \circ P_{\frac{1}{2}v}$.

Da $P_A = D_A(180^\circ)$, ist $T_v \circ D_A(\alpha) = \underbrace{P_{\vec{0}} \circ \underbrace{P_{\frac{1}{2}v} \circ D_A(\alpha)}_{\text{Drehung}}}_{\text{Drehung}}$.

Für $\alpha = 180^\circ$ ist $T_v \circ D_A(\alpha)$ eine Verkettung von Punktsymmetrie und Translation und ist damit auch eine Punktsymmetrie und deswegen eine Drehung.