Ähnlichkeits-Transformationen

Def. Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (bzw. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$) heißt eine Ähnlichkeits-Transformation, wenn ein $k > 0$ existiert, so dass $\forall X, Y \in \mathbb{R}^2$ gilt: $k \cdot d(X, Y) = d(f(X), f(Y))$. Die Zahl k heißt dann Koeffizient (oder Faktor) der Streckung .

Bemerkung. Isometrien sind gerade die Ähnlichkeits-Transformationen mit $k = 1$.

Bsp. Wir betrachten die Homothetie $M_k : x \mapsto k \cdot x$ (wobei $k \neq 0$). Sie ist eine Ähnlichkeits-Transformation mit dem Koeffizienten der Streckung gleich $|k|$, denn

$$d(f(X), f(Y)) = |f(X) - f(Y)| = |k \cdot (X - Y)| = |k| \cdot |X - Y| = |k| \cdot d(X, Y).$$

Lemma 18. Für jede Ähnlichkeits-Transformation f mit Faktor k gilt: $f \circ M_{\frac{1}{k}}$ und $M_{\frac{1}{k}} \circ f$ sind Isometrien.

Beweis. $d(M_{\frac{1}{k}} \circ f(X), M_{\frac{1}{k}} \circ f(Y)) = \frac{1}{k} d(f(X), f(Y)) = d(X, Y)$. Für $f \circ M_{\frac{1}{k}}$ analog. $\square$

Folgerung 1. Jede Ähnlichkeits-Transformation ist eine Affinität.

Wiederholung der Definition: Eine affine Abbildung (vom $\mathbb{R}^n$) ist eine Abbildung der Form $x \mapsto Ax + b$, wobei A eine Matrix ist, und $b \in \mathbb{R}^n$. Ist die Matrix A nichtausgeartet, d.h., ist $\det(A) \neq 0$, dann heißt die affine Abbildung eine Affinität. Affinitäten sind Bijektionen als Verkettungen von zwei Bijektionen (weil die lineare Abbildungen $x \mapsto Ax$ mit nichtausgearteten A sowie Translationen $x \mapsto x + v$ Bijektionen sind.)

Aussage. Die Menge aller Affinitäten bilden eine Gruppe.

Beweis. Die Verkettung von Abbildungen der Form $x \mapsto A_1x + b_1$ und $x \mapsto A_2x + b_2$ ist auch eine affine Abbildung, denn

$$A_1(A_2x + b_2) + b_1 = \underbrace{A_1A_2}_{A}x + \underbrace{A_1b_2 + b_1}_{b}. \quad (*)$$

Die inverse Abbildung zur einer Affinität ist auch eine affine Abbildung. In der Tat, die Abbildung invers zu $x \mapsto Ax + b$ ist

$$x \mapsto A^{-1}x - A^{-1}b$$

(um es zu sehen, setzen Sie $A_2 := A_1^{-1}$ und $b_2 := -A_1^{-1}b_1$ in $(*)$)

Beschreibung von Ähnlichkeits-Transformationen.

Folgerung 2. *Jede Ähnlichkeits-Transformation f des $(\mathbb{R}^2, \langle\ ,\ \rangle)$ hat die Form*

$$f(x) = k \cdot Ox + v,$$

wobei O eine orthogonale 2×2-Matrix ist, $v \in \mathbb{R}^2$, und $k > 0$.
(Also, $f = I \circ M_k$ für eine Isometrie I).

Ferner gilt: jede Ähnlichkeits-Transformation ist eine Bijektion und die Menge aller Ähnlichkeits-Transformationen bilden eine Gruppe (bzgl. Verkettung).

Bemerkung. Jede Abbildung der Form in Folg. 2 ist offensichtlich eine Ähnlichkeits-Transformation als Verkettung $I \circ M_k$.

Beweis. Nach Lemma 18 ist Abbildung $f \circ M_{\frac{1}{k}}$ eine Isometrie,

$f \circ M_{\frac{1}{k}} = I$. Dann ist $f = I \circ M_k$.

Um zu zeigen, dass die Menge von Ähnlichkeits-Transformationen eine Gruppe bilden, müssen wir zeigen, dass Verkettung von zwei Ähnlichkeits-Transformationen eine Ähnlichkeits-Transformation ist, und dass die inverse Abbildung zur Ähnlichkeits-Transformation auch eine Ähnlichkeits-Transformation ist (**Siehe eine Erklärung auf der nächsten Seite)**. Die erste Aussage folgt aus der Formel (*ast*) für die Verkettung von affinen Abbildungen auf den vorherigen Folien:

$$\boxed{A_1(A_2x + b_2) + b_1 = \underbrace{A_1A_2}_{A}\,x + \underbrace{A_1b_2 + b_1}_{b}. \quad (*)}$$

Für die Ähnlichkeits-Transformationen sind $A_1 = k_1O_1$ und $A_2 = k_2O_2$ für orthogonalen Matrizen O_1 und O_2, schließlich $A = \underbrace{k_1k_2}_{k}\,\underbrace{O_1O_2}_{O}$. Damit hat die Verkettung die Form $x \mapsto kOx + b$.

Die zweite Aussage folgt aus der Formel für die inverse Affinität:

Die Abbildung invers zu $x \mapsto Ax + b$ ist $x \mapsto A^{-1}x - A^{-1}b$.

Da die Matrix invers zur Matrix kO die Matrix $\frac{1}{k}O^t$ ist (und weil O^t auch eine orthogonale Matrix ist), hat die Abbildung invers zur $x \mapsto kOx + b$ die Form $x \mapsto \frac{1}{k}O^tx - O^tb$ und ist auch eine Ähnlichkeits-Transformation.

Exkurs: Wie zeigt man, dass eine Teilmenge einer Gruppe auch eine Gruppe ist?

Wiederholung der Definition: Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $G' \subseteq G$ nicht leer. Die Teilmenge G' heißt eine Untergruppe, wenn sie abgeschlossen bezüglich der Operation "$\circ$" und bezüglich invertieren ist, d.h.: $\forall\ g, g_1, g_2 \in G'$ gilt:

- $g_1 \circ g_2 \in G'$
- $g^{-1} \in G'$

Fakt (LA I). Untergruppe einer Gruppe ist eine Gruppe bezüglich der induzierten Operation.

Wie wir den Fakt oben in der vorherigen Folie benutzt haben:

- Wir betrachten die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^n} = \{\text{alle Bijectionen von } \mathbb{R}^n \text{ nach } \mathbb{R}^n\}$. Sie ist bekanntlich eine Gruppe bezüglich der Verkettung der Bijektionen, weil:
  - G_1 : Verkettung von beliebigen Abbildungen ist assoziativ;
  - G_2 : Identitätsabbildung ist eine Bijektion und ist ein neutrales Element bezüglich der Verkettung;
  - G_3 : für jede Bijektion f existiert die inverse Abbildung f^{-1}, welche automatisch auch eine Bijektion ist. Die Abbildung f^{-1} hat dann die gewünschte Eigenschaft $f^{-1} \circ f = Id$.
- Für die Gruppe $(\mathcal{S}_{\mathbb{R}^n}, \circ)$ betrachten wir die Teilmenge $\mathrm{Aff}_{\mathbb{R}^n} \subseteq \mathcal{S}_{\mathbb{R}^n}$, welche aus allen Affinitäten von $\mathbb{R}^n$ besteht. Wir haben ja erklärt, dass jede Affinität eine Bijektiuon ist, also ist die Menge $\mathrm{Aff}_{\mathbb{R}^n}$ tatsächlich eine Teilmenge von $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^n}$.
- Auf der vorherigen Folie haben wir bewiesen, dass die Teilmenge $\mathrm{Aff}_{\mathbb{R}^n}$ bezüglich der Operation "$\circ$" und bezüglich Invertieren ist. Dann ist sie eine Untergruppe, und schließlich eine Gruppe.

Ähnlichkeits-Transformation erhält die Winkel

Aussage 1. Sei f eine Ähnlichkeits-Transformation mit dem Streckungskoeffizienten k. Dann gilt:
$\langle f(A) - f(B), f(C) - f(B)\rangle = k^2\langle A - B, C - B\rangle$.

Beweis. Wir haben gesehen, dass $f = I \circ M_k$ für eine Isometrie I ist. Die Homothetie M_k multipliziert Skalarprodukt mit k:
$\langle M_k(A)-M_k(B), M_k(C)-M_k(B)\rangle = \langle k\cdot A-k\cdot B, k\cdot C-k\cdot B\rangle = k^2\langle A-B, C-B\rangle$.
Da die Isometrie Skalarprodukt erhält (Folgerung 3 aus Satz 1), ist
$\langle f(A) - f(B), f(C) - f(B)\rangle = k^2\langle A - B, C - B\rangle$.

Folgerung 3. Sei f eine Ähnlichkeits-Transformation und $A, B, C \in \mathbb{R}$. Dann gilt: $\measuredangle ABC = \measuredangle f(A)f(B)f(C)$.

Beweis. Das Winkelmaß $\measuredangle f(A)f(B)f(C)$ ist gleich

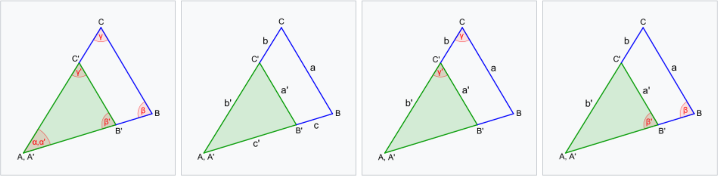
$$\arccos\left(\frac{\langle f(B) - f(A), f(B) - f(C)\rangle}{|f(B) - f(A)| \cdot |f(B) - f(C)|}\right)$$

$$= \arccos\left(\frac{k^2\langle B - A, B - C\rangle}{k \cdot |B - A| \cdot k \cdot |B - C|}\right)$$

$$= \arccos\left(\frac{\langle f(B) - f(A), f(B) - f(C)\rangle}{|f(B) - f(A)| \cdot |f(B) - f(C)|}\right) = \arccos\left(\frac{\langle B - A, B - C\rangle}{|B - A| \cdot |B - C|}\right). \quad \square$$

Dreieckssätze für Ähnlichkeits-Transformationen

(Bild aus Wikipedia)

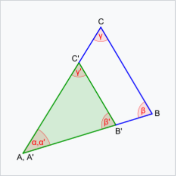


W:W:W-Satz S:S:S-Satz S:W:S-Satz S:S:W-Satz

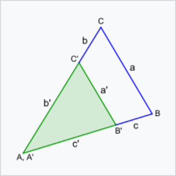
SSS-Ähnlichkeits-Satz: *Es seien A, B, C und A', B', C' Punkte des $\mathbb{R}^2$, s.d. weder A, B, C noch A', B', C' auf einer Geraden liegen. Dann gilt: es gibt eine Ähnlichkeits-Transformation f, mit $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $C \mapsto C'$, genau dann wenn für ein $k > 0$ $k \cdot d(A, B) = d(A', B')$, $k \cdot d(B, C) = d(B', C')$ und $k \cdot d(A, C) = d(A', C')$. Ferner gilt: wenn diese Ähnlichkeits-Transformation existiert, ist sie eindeutig.*

SWS-Ähnlichkeits-Satz. *Es seien A, B, C und A', B', C' Punkte des $\mathbb{R}^2$, s.d. weder A, B, C noch A', B', C' auf einer Geraden liegen. Dann gilt: es gibt eine Ähnlichkeits-Transformation f, mit $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $C \mapsto C'$, genau dann wenn $k \cdot d(A, B) = d(A', B')$, $k \cdot d(A, C) = d(A', C')$ und $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$. Ferner gilt: wenn diese Ähnlichkeits-Transformation existiert, ist sie eindeutig.*

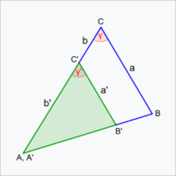
(Bild aus Wikipedia)



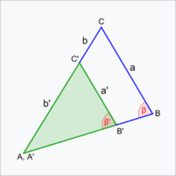
W:W:W-Satz



S:S:S-Satz



S:W:S-Satz



S:S:W-Satz

WW-Ähnlichkeits- Satz (analog zu WSW-Kongruenzsatz; auf dem Bild oben heißt WWW- Satz). *Es seien A, B, C und A', B', C' Punkte des $\mathbb{R}^2$, s.d. weder A, B, C noch A', B', C' auf einer Geraden liegen. Dann gilt: es gibt eine Ähnlichkeits-Transformation f mit $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $C \mapsto C'$, genau dann wenn $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$ und $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$. Ferner gilt: wenn diese Ähnlichkeits-Transformation existiert, ist sie eindeutig.*

SSW-Ähnlichkeits-Satz. *Wenn für zwei Punktetripel A, B, C und A', B', C' gilt:*

- *weder A, B, C noch A', B', C' liegen auf einer Geraden,*
- *$k \cdot d(A, C) = d(A', C')$, $k \cdot d(A, B) = d(A', B')$ für ein $k \neq 0$ und $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$*
- *und außerdem $|AC| \geq |AB|$ und $|AC| \geq |BC|$,*

dann existiert eine Ähnlichkeits-Transformation, mit $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $C \mapsto C'$. Ferner gilt: wenn diese Ähnlichkeits-Transformation existiert, ist sie eindeutig.

Beweis vom SSS-Ähnlichkeits-Satz: Existenz

(**Beweis der anderen Sätze ist eine Hausaufgabe.**)

SSS-Ähnlichkeits-Satz: *Es seien A, B, C und A', B', C' Punkte des $\mathbb{R}^2$, s.d. weder A, B, C noch A', B', C' auf einer Geraden liegen. Dann gilt: es gibt eine Ähnlichkeits-Transformation f, mit $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $C \mapsto C'$, genau dann wenn für ein $k > 0$ $k \cdot d(A, B) = d(A', B')$, $k \cdot d(B, C) = d(B', C')$ und $k \cdot d(A, C) = d(A', C')$. Ferner gilt: wenn diese Ähnlichkeits-Transformation existiert, ist sie eindeutig.*

Beweis. Die $\Longrightarrow$-Richtung ist offensichtlich: wenn es eine Ähnlichkeits-Transformation f mit $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $C \mapsto C'$ gibt, dann gilt $k \cdot d(A, B) = d(A', B')$, $k \cdot d(B, C) = d(B', C')$, $k \cdot d(A, C) = d(A', C')$ für k gleich dem Streckungskoeffizient von f.

Um den Satz in die $\Longleftarrow$-Richtung zu beweisen, nehmen wir eine Ähnlichkeits-Transformation S mit Streckungskoeffizient k, z.B. die Abbildung $M_k : x \mapsto k \cdot x$ aus dem Beweis von Lemma 18. Die Bilder der Punkte A, B, C bzgl. S werden wir mit A'', B'', C'' bezeichnen. Die Punkte liegen nicht auf einer Geraden und erfüllen die Bedingung $d(A'', B'') = k \cdot d(A, B) = d(A', B')$, $d(B'', C'') = k \cdot d(B, C) = d(B', C')$, $d(C'', D'') = k \cdot d(C, D) = d(C', D')$. Dann gibt es eine Isometrie I, die $A'' \mapsto A'$, $B'' \mapsto B'$, $C'' \mapsto C'$ abbildet. Die Verkettung $I \circ S$ bildet $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $C \mapsto C'$ wie gewünscht, und ist eine Ähnlichkeits-Transformation nach Folgerung 2.

Eindeutigkeit:

SSS-Ähnlichkeits-Satz: *Es seien A, B, C und A', B', C' Punkte des $\mathbb{R}^2$, s.d. weder A, B, C noch A', B', C' auf einer Geraden liegen. Dann gilt: es gibt eine Ähnlichkeits-Transformation f, mit $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $C \mapsto C'$, genau dann wenn für ein $k > 0$ $k \cdot d(A,B) = d(A',B')$, $k \cdot d(B,C) = d(B',C')$ und $k \cdot d(A,C) = d(A',C')$. Ferner gilt: wenn diese Ähnlichkeits-Transformation existiert, ist sie eindeutig.*

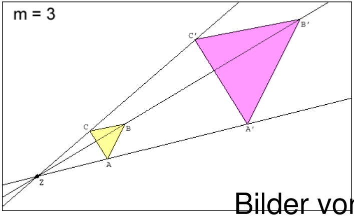
Beweis der Eindeutigkeit. Wir benutzen, dass die Ähnlichkeits-Transformationen eine Gruppe bilden (Folg. 2 aus Lemma 18):
Seien f und $\tilde{f}$ zwei Ähnlichkeits-Transformationen s.d. sie beide $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $C \mapsto C'$ abbilden.
Wir betrachten $f^{-1} \circ \tilde{f}$. Diese Abbildung ist eine Ähnlichkeits-Transformation, weil die Menge von Ähnlichkeits-Transformationen eine Gruppe bzgl. Verkettung ist und deswegen die Verkettung von zwei Elementen der Gruppe, also von zwei Ähnlichkeits-Transformationen, wieder ein Element der Gruppe, also wieder eine Ähnlichkeits-Transformation ist.
Wir haben offensichtlich $f^{-1} \circ \tilde{f}(A) = A$, $f^{-1} \circ \tilde{f}(B) = B$ und $f^{-1} \circ \tilde{f}(C) = C$. Dann ist der Streckungkoefficient von $f^{-1} \circ \tilde{f}$ gleich 1, also ist $f^{-1} \circ \tilde{f}$ eine Isometrie. Es gibt aber (nach SSS-Satz für Isometrien) nur eine Isometrie, die $A \mapsto A$, $B \mapsto B$, $C \mapsto C$ abbildet; und diese Isometrie ist die Identitätsabbildung. Also, $f^{-1} \circ \tilde{f} = Id$ und deswegen $f = \tilde{f}$. □

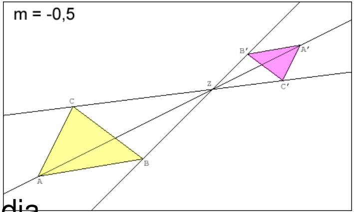
Zentrische Streckung.

Gegeben seien ein Punkt $Z \in \mathbb{R}^2$ der Zeichenebene und eine reelle Zahl $m \neq 0$. Die zentrische Streckung mit Zentrum Z und Streckungsfaktor m ist diejenige Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ so dass der Bildpunkt P' eines Punktes P folgende Eigenschaften besitzt:

- Z, P und P' liegen auf einer Geraden.
- Für $m > 0$ liegen P und P' auf derselben Seite von Z, für $m < 0$ auf verschiedenen Seiten.
- Die Streckenlänge $|ZP'|$ ist gleich dem $|m|$ -fachen der Streckenlänge $|ZP|$.

Die beiden Skizzen zeigen die Anwendung zweier zentrischer Streckungen (mit $m = 3$ und $m = -0,5$) auf jeweils ein Dreieck ABC





Bilder von WiKipedia

Zentrische Streckung ist eine Ähnlichkeits-Transformation

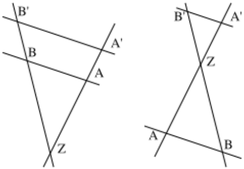
Um dies zu zeigen finden wir die Formel für die zentrische Streckung.

$$x \mapsto Z + m(x - Z) = mx + (1 - m)Z.$$

Wir sehen, dass diese Formel mit der Formel aus Folgerung 2 übereinstimmt; daher ist diese Abbildung eine Ähnlichkeits-Transformation

Bemerkung. Wir sehen auch dass die zentrische Streckung mit $Z = \vec{0}$ ist die Homothetie M_m aus der Anfang dieses Folienabschnitts.

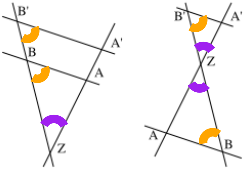
Strahlensatz



Strahlensatz. Es verhalten sich die ausgeschnittenen Strecken auf den Parallelen, wie die ihnen entsprechenden, vom Scheitel aus gemessenen Strecken auf den Strahlen.

D.h., falls die Geraden L, L' parallel sind, und die Geraden M_A, M_B einen Schnittpunkt Z haben, dann gilt für die Schnittpunkte $A := M_A \cap L$, $B := M_B \cap L$, $A' := M_A \cap L'$, $B' := M_B \cap L'$ so dass $Z \notin \{A, B, A', B'\}$:
$\frac{|AB|}{|A'B'|} \overset{\text{Strahlensatz}}{=} \frac{|ZA|}{|ZA'|} \overset{\text{Strahlensatz}}{=} \frac{|ZB|}{|ZB'|}$.

Einen Beweis haben wir (eventuell) auch im Abschnitt "affine Geometrie" von LA 2 gesehen. Man kann auch mit Hilfe von zentrische Streckung den Satz beweisen (eventuell, Hausaufgabe). Ich gebe noch einen Beweis, welcher vollständig elementargeometrisch ist (mit allen üblichen Nachteilen: man soll mehrere Fälle betrachten wofür wir jetzt keine Zeit haben).



Strahlensatz: $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|ZA|}{|ZA'|} \overset{\text{Strahlensatz}}{=} \frac{|ZB|}{|ZB'|}$.

Wir benutzen, dass $\sphericalangle A'B'Z = \sphericalangle ABZ$ und dass $\sphericalangle BZA = \sphericalangle B'ZA'$. Der Sinussatz für die Dreiecke ABZ und $A'B'Z$ sagt uns, dass

$$\frac{\sin(A'B'Z)}{|A'Z|} = \frac{\sin(A'ZB')}{|A'B'|} \quad \text{und} \quad \frac{\sin(ABZ)}{|AZ|} = \frac{\sin(AZB)}{|AB|}.$$

Da die gleichfarbigen Zähler in den Formeln oben gleich sind, bekommen wir den Strahlensatz

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|ZA|}{|ZA'|} = \frac{|ZB|}{|ZB'|}.$$