Wir kehren zur Elementargeometrie zurück

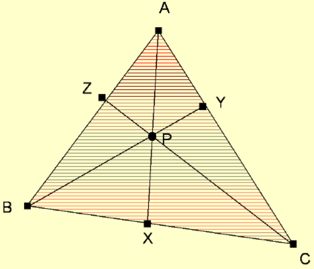
- Vorlesung 6a: Satz von Ceva und Anwendungen
- Vorlesung 6b: Satz von Menelaus und Anwendugen
- Vorlesung 6c: Kreiswinkelsatz und Anwendungen

Satz von Ceva

Der italienische Mathematiker Giovanni Ceva
fand 1678 folgendes heraus:

Schneiden sich drei Ecktransversalen AX, BY, CZ eines Dreiecks in einem Punkt, dann gilt:

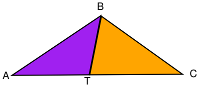
$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$



Begriffserläuterungen. Ecktransversale ist eine Strecke, die eine Ecke eines Dreiecks mit einem Punkt der Gegenseite verbindet.

Ersatz für Flächeninhalt im Beweis von Satz von Ceva

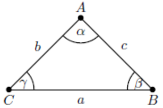
In dem Beweis werden wir den Flächeninhalt eines Dreiecks benutzen: wir werden benutzen, dass $Vol(ABC) = Vol(ABT) + Vol(CBT)$ und dass $Vol(ABC) \neq 0$.



Wir haben den Begriff Flächeninhalt noch nicht eingeführt; deswegen können wir ihn noch nicht benutzen. Ich werde diese formale Schwierigkeit wie folgt beseitigen:

Für jedes Dreieck ABC definiere ich

$$Vol(ABC) = \tfrac{1}{2}|AB||BC|\sin(\langle ABC) = \tfrac{1}{2}ac\sin(\beta).$$



Aus Sinussatz folgt, dass diese Zahl nur vom Dreieck abhängt (und nicht von den Ecken), da

$$\tfrac{1}{2}ab\sin(\gamma) = \tfrac{1}{2}bc\sin(\alpha) = \tfrac{1}{2}ac\sin(\beta) \qquad (*)$$

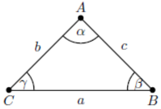
— um $(*)$ zu bekommen, müssen wir die Formel aus dem Sinussatz, siehe unten, mit $\frac{1}{2}abc$ multiplizieren.

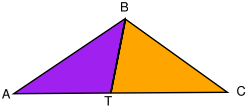
$$\boxed{\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c} \qquad \text{(Sinussatz)}}$$

Beweis, dass $Vol(ABC) = Vol(ABT) + Vol(CBT)$

Für jedes Dreieck ABC definiere ich

$$Vol(ABC) = \frac{1}{2}|AB||BC|\sin(\langle ABC) = \frac{1}{2}ac\sin(\beta).$$





$$Vol(ABT) = \frac{1}{2}|BA||TA|\sin(\langle BAC);$$
$$Vol(ABC) = \frac{1}{2}|BA||CA|\sin(\langle BAC),$$
also $\frac{Vol(ABT)}{Vol(ABC)} = \frac{|TA|}{|CA|}$.

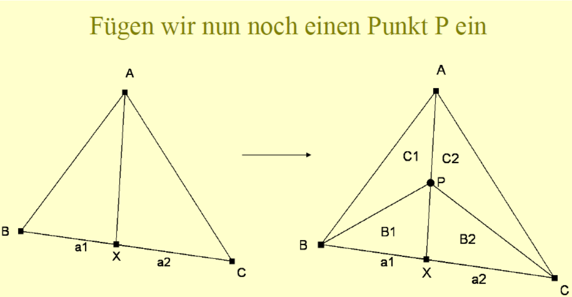
Analog gilt: $\frac{Vol(CBT)}{Vol(ABC)} = \frac{|TC|}{|CA|}$.

Dann gilt: $\frac{Vol(CBT)}{Vol(ABC)} + \frac{Vol(ABT)}{Vol(ABC)} = \frac{|TC|}{|CA|} + \frac{|TA|}{|CA|} = \frac{|TC|+|TA|}{|CA|} = \frac{|CA|}{|CA|} = 1.$

Dann ist $Vol(CBT) + Vol(ABT) = Vol(ABC)$ $\square$

Bemerkung. Wir sehen auch, dass $\frac{Vol(ABT)}{Vol(CBT)} = \frac{AT}{TC}$

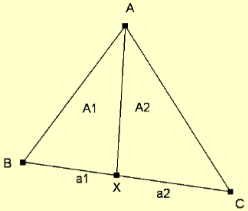
Beweis von Satz von Ceva

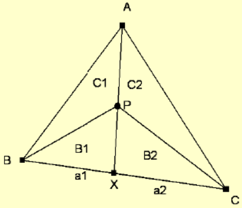


Aus der Bemerkung oben (angewendet auf Dreiecke $A_1 := BAX$ und $A_2 := CAX$) bekommen wir, dass $\frac{Vol(A_1)}{Vol(A_2)} = \frac{a_1}{a_2}$

Analog zu

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{a_1}{a_2} \qquad \text{gilt nun} \qquad \frac{B_1}{B_2} = \frac{a_1}{a_2}$$





Durch Umformungen erhalten wir:

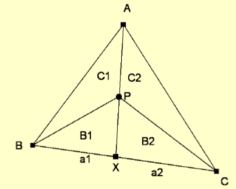
(i) $\frac{Vol(A_1)}{Vol(A_2)} = \frac{a_1}{a_2}$ $(\Longleftrightarrow a_2 Vol(A_1) = a_1 Vol(A_2))$ und analog

(ii) $\frac{Vol(B_1)}{Vol(B_2)} = \frac{a_1}{a_2} \Longleftrightarrow a_2 Vol(B_1) = a_1 Vol(B_2))$.

Dann ist $(i) - (ii) = a_2(Vol(A_1) - Vol(B_1)) = a_1(Vol(A_2) - Vol(B_2))$.

Nach Konstruktion ist aber $Vol(A_1) - Vol(B_1) = Vol(C_1)$,

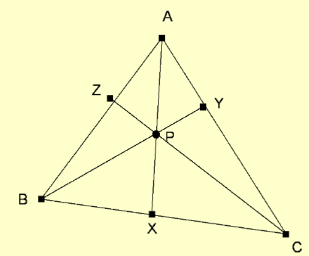
$Vol(A_2) - Vol(B_2) = Vol(C_2)$.



Es gilt also:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{|BX|}{|XC|} = \frac{Vol(C_1)}{Vol(C_2)} = \frac{Vol(ABP)}{Vol(CAP)}.$$

Werden noch zwei Ecktransversalen eingefügt, so dass sich alle in P schneiden,

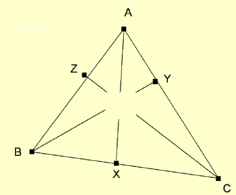


dann gilt für die Seiten b und c das gleiche wie für a,also

$$\frac{|BX|}{|XC|} = \frac{Vol(ABP)}{Vol(CAP)},$$
$$\frac{|CY|}{|YA|} = \frac{Vol(BCP)}{Vol(ABP)},$$
$$\frac{|AZ|}{|ZB|} = \frac{Vol(CAP)}{Vol(BCP)}.$$

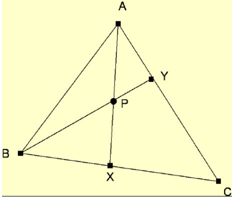
Dann ist $\frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \cdot \frac{|AZ|}{|ZB|} = \frac{\color{red}{Vol(ABP)}}{\color{blue}{Vol(CAP)}} \cdot \frac{Vol(BCP)}{\color{red}{Vol(ABP)}} \cdot \frac{\color{blue}{Vol(CAP)}}{Vol(BCP)} = 1,$ $\square$

Umkehrung des Satzes von Ceva

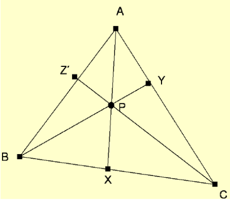


Umkehrung von Ceva Erfüllen drei Ecktransversalen die Gleichung $\frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \cdot \frac{|AZ|}{|ZB|} = 1$, so schneiden sie sich in einem Punkt

Beweis. Wir nehmen ein Dreieck mit zwei Ecktransversalen, die sich in P schneiden,



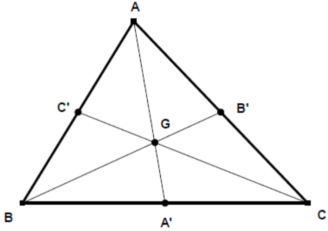
dann gibt es nur eine Ecktransversale durch C, die ebenfalls durch P geht. Diese schneidet sich mit AB in Z'.



Damit erfüllt Z' nach Satz von Ceva die Bedingungen für die Gleichung $\frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \cdot \frac{|AZ'|}{|Z'B|} = 1$.

Da aber $\frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} \cdot \frac{|AZ|}{|ZB|} = 1$ unsere Voraussetzung ist, folgt daraus, dass Z und Z' zusammenfallen. Daher schneidet CZ die anderen Ecktransversalen in P, □

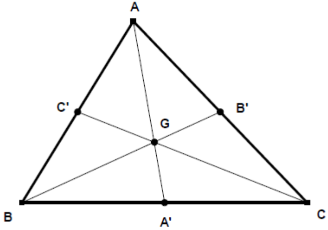
Folgerung 1 Alle drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.



Begriffserläuterungen. Seitenhalbierende werden definiert als Transversalen, die die Ecken des Dreiecks mit den Mittelpunkten der jeweils gegenüberliegenden Seiten verbinden.

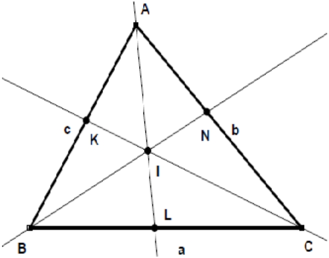
Bemerkung. Die Folgerung haben wir bereits in LAAG 2 bewiesen, mit Hilfe von affinen Transformationen. Wir geben jetzt einen anderen Beweis mit Hilfe von Satz von Ceva.

Folgerung 1 Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.



Beweis. In dem oben abgebildeten Dreieck ABC sind AA', BB' und CC' die Seitenhalbierenden dieses Dreiecks. Eine Seitenhalbierende hat die Eigenschaft, dass sie die Seite, die sie halbiert in zwei gleich große Strecken teilt, so dass gilt: $|BA'| = |A'C|$; $|CB'| = |B'A|$ und $|AC'| = |C'B|$.
Dann ist $1 = \frac{|BA'|}{|A'C|} = \frac{|CB'|}{|B'A|} = \frac{|AC'|}{|C'B|}$.
Dann ist $\frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} \cdot \frac{|AC'|}{|C'B|} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$. Nach der Umkehrung des Satzes von Ceva schneiden sich diese drei Ecktransversalen in einem Punkt, $\square$

Folgerung 2 Die Winkelhalbierenden der drei Winkel eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.



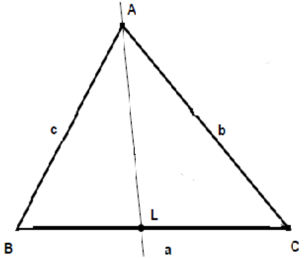
Hilfslemma Jede Winkelhalbierende eines Dreiecks teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der Längen der anliegenden Seiten. (z.B. $\frac{|CL|}{|BL|} = \frac{b}{c}$)

Beweis von Folgerung unter der Annahme, dass Hilfslemma richtig ist. Nach Hilfslemma gilt $\frac{|AB|}{|BL|} = \frac{|AC|}{|LC|}$, folglich $\frac{|BL|}{|LC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$. Analog bekommt man $\frac{|CN|}{|NA|} = \frac{|BC|}{|AB|}$ und $\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|AC|}{|BC|}$.

Dann ist $\frac{|BL|}{|LC|} \cdot \frac{|CN|}{|NA|} \cdot \frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|AB|}{|AC|} \cdot \frac{|BC|}{|AB|} \cdot \frac{|AC|}{|BC|} = 1$. Nach der Umkehrung des Satzes von Ceva schneiden sich diese drei Ecktransversalen in einem Punkt, $\square$

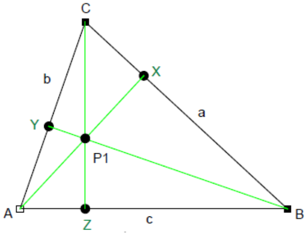
Beweis von Hilfslemma

Hilfslemma Jede Winkelhalbierende eines Dreiecks teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der Längen der anliegenden Seiten.



Beweis. AL ist eine Winkelhalbierende und teilt das Dreieck ABC in die zwei Dreiecke ABL und ALC.
Nach Sinussatz (Satz 15) angewendet auf Dreieck ABL gilt:
$\frac{\sin(B)}{|AL|} = \frac{\sin(\frac{1}{2}A)}{|BL|}$. Analog bekommen wir für ALC, dass $\frac{\sin(C)}{|AL|} = \frac{\sin(\frac{1}{2}A)}{|CL|}$.
Dann gilt: $\frac{\sin(B)}{\sin(C)} = \frac{|CL|}{|BL|}$ $\qquad (*)$
Der Sinussatz angewendet auf ABC liefert uns $\frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}$ folglich $\frac{\sin(B)}{\sin(C)} = \frac{b}{c}$. Wir setzen dies in $(*)$ ein und bekommen:
$\frac{|CL|}{|BL|} = \frac{b}{c}$, □

Folgerung 3 Die Ecktransversalen, die auf den gegenüberliegenden Seiten senkrecht stehen (="Höhen"), schneiden sich in einem Punkt.



Beweis. Wir nehmen an, dass alle Winkel spitz sind, Beweis für Dreiecke mit stumpfem Winkel ist analog (obwohl in dem Fall der Schnittpunkt der Ecktransversalen außerhalb des Dreiecks liegt; als Ecktransversale sollte man aber die ganze Gerade verstehen, nicht nur die Stecke der Geraden die im Dreieck liegt.) Wir benutzen $\cos := \frac{Ankathete}{Hyptenuse}$ um zu bekommen:

$|AZ| = b \cdot \cos(A), |ZB| = a \cdot \cos(B),\ |BX| = c \cdot \cos(B),$
$|XC| = b \cdot \cos(C),\ |CY| = a \cdot \cos(C),\ |YA| = c \cdot \cos(A).$

Durch einsetzen in die Gleichung von Ceva erhalten wir

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = \frac{b \cdot \cos(A)}{a \cdot \cos(B)} \cdot \frac{c \cdot \cos(B)}{b \cdot \cos(C)} \cdot \frac{a \cdot \cos(C)}{c \cdot \cos(A)} = 1, \qquad \square$$