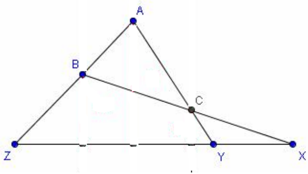
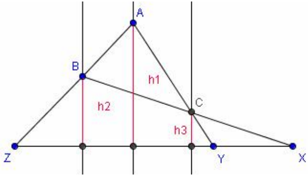
Satz von Menelaus



Satz von Menelaus. Sind die Punkte X, Y und Z auf den Geraden $L(B, C)$, $L(C, A)$, $L(A, B)$ des Dreiecks kollinear, dann gilt: $\frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CY|}{|AY|} \cdot \frac{|AZ|}{|BZ|} = 1$.

Beweis von Satz von Menelaus



Satz von Menelaus. Sind die Punkte X, Y und Z auf den Geraden $L(B,C)$, $L(C,A)$, $L(A,B)$ des Dreiecks kollinear, dann gilt: $\frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CY|}{|AY|} \cdot \frac{|AZ|}{|BZ|} = 1.$

Beweis. Vorausgesetzt sei die Kollinearität der Punkte X, Y und Z. Wie in der Abbildung seien h_1, h_2 und h_3 die Längen der Lote von A, B und C auf die Gerade $L(X,Y)$.

Die Höhen AA', BB', CC' sind senkrecht zu einer Gerade und deswegen parallel nach Wechselwinkelsatz.

Wir wenden dreimal Strahlensatz an um die drei Gleichungen zu bekommen:

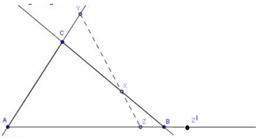
$\frac{|BX|}{|CX|} = \frac{h_2}{h_3}; \frac{|CY|}{|AY|} = \frac{h_3}{h_1}; \frac{|AZ|}{|BZ|} = \frac{h_1}{h_2}.$

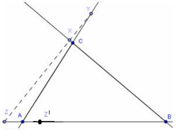
Aus diesen drei Gleichungen erhalten wir das gewünschte Ergebnis durch Multiplikation:

$\frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CY|}{|AY|} \cdot \frac{|AZ|}{|BZ|} = \frac{h_2}{h_3} \cdot \frac{h_3}{h_1} \cdot \frac{h_1}{h_2} = 1,$ $\square$.

Direkte Umkehrung des Satzes von Menelaus ist falsch

Man beachte aber bitte, dass immer entweder alle drei Seiten oder genau eine Seite des Dreiecks ABC verlängert werden müssten, um die drei verschiedenen kollinearen Punkte X, Y und Z unterzubringen.





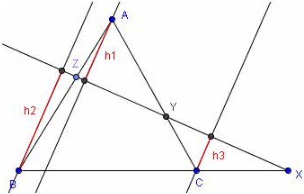
Wenn ein Punkt Z' wie auf dem Bild unten gewählt ist, liegen die Punkte X, Y, Z' nicht auf einer Geraden, obwohl $\frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CY|}{|AY|} \cdot \frac{|AZ'|}{|BZ'|} = 1$. Also brauchen wir für die Umkehrung des Satzes von Menelaus zusätzliche Voraussetzungen. Wir werden zuerst eine Version des Satz von Menelaus formulieren, in welcher das Analog der Formel $\frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CY|}{|AY|} \cdot \frac{|AZ|}{|BZ|} = 1$ bereits berücksichtigt, dass immer entweder alle drei Seiten oder genau eine Seite des Dreiecks ABC verlängert werden müssen. Dann werden wir die Umkehrung des Satzes formulieren und beweisen.

Wiederholung: Teilverhältnis Die Punkte A, B, C seien kollinear, (d.h., sie liegen auf einer Geraden) und $B \neq A$. Dann ist $TV(A, B, C)$ die Zahl λ, so dass $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ (d.h., $C - A = \lambda(B - A)$).
Eine "altmodische", aber oft in der Elementargeometrie verwendete Bezeichnung für das Teilverhältnis ist $TV(A, B, C) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}}$. Diese Bezeichnung ist tatsächlich gut für mnemonische Zwecke: Damit ein Bruch, sodass Zähler und Nenner Vektoren sind sinnvoll ist, müssen die Vektoren proportional sein, und deswegen die Punkte A, B, C kollinear sein. Damit der Nenner $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ ist, muss $A \neq B$ sein. Jetzt kann man die Formel $\lambda = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}}$ "umformen" zu $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ und das ist die Formel aus der Definition des Teilverhältnis.

Satz von Menelaus mit Hilfe von Teilverhältnis

Satz von Menelaus mit Hilfe von Teilverhältnis. Sind die Punkte X, Y und Z auf den Geraden $L(B, C)$, $L(C, A)$, $L(A, B)$ des Dreiecks kollinear, dann gilt:
$TV(X, C, B) \cdot TV(Y, A, C) \cdot TV(Z, B, A) = 1$,
oder, in "mnemonischen Bezeichnungen",
$\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{CX}} \cdot \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{AY}} \cdot \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{BZ}} = 1$
Beweis davon ist analog zum Satz von Menelaus, den wir vorher bewiesen haben; man muss nur das Vorzeichen beachten.

Die Umkehrung des Satzes von Menelaus



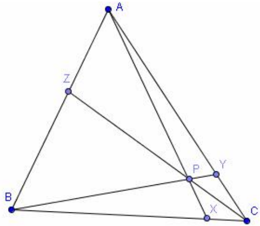
Umkehrung des Satzes von Menelaus Ist die Gleichung $TV(X, C, B) \cdot TV(Y, A, C) \cdot TV(Z, B, A) = 1$ erfüllt für Punkte X, Y und Z auf den drei Seiten, dann sind diese drei Punkte kollinear.

Beweis. Liegen die Punkte X, Y und Z auf den drei Seiten derart, dass $TV(X, C, B) \cdot TV(Y, A, C) \cdot TV(Z, B, A) = 1$ gilt, dann mögen sich die Geraden $L(A, B)$ und $L(X, Y)$ in Z' treffen.
Dann gilt: $TV(X, C, B) \cdot TV(Y, A, C) \cdot TV(Z', B, A) = 1$. Daher ist $TV(Z, B, A) = TV(Z', B, A) := \lambda$.
Dann ist $\overrightarrow{ZA} = \lambda \cdot \overrightarrow{ZB}$ und $\overrightarrow{Z'A} = \lambda \cdot \overrightarrow{Z'B}$. Dann ist
$\underbrace{\overrightarrow{ZA} - \overrightarrow{Z'A}}_{\overrightarrow{ZZ'}} = \lambda \cdot \underbrace{(\overrightarrow{ZB} - \overrightarrow{Z'B})}_{\overrightarrow{ZZ'}}$. Also, $\overrightarrow{ZZ'} = \lambda \cdot \overrightarrow{ZZ'}$.

Damit ist $\overrightarrow{ZZ'} = \vec{0}$; deswegen fallen Z' und Z zusammen. Damit haben wir bewiesen, dass die Punkte X, Y und Z kollinear sind, $\square$

Beweis des Satzes von Ceva mit Menelaus

Wir wollen nun den Satz von Ceva mit Hilfe des Satzes von Menelaus beweisen.



Gegeben: Wir gehen davon aus, dass der Satz von Menelaus und sein Umkehrsatz gelten. Weiterhin nehmen wir an, dass es drei Ecktransversalen gibt, die sich in einem Punkt schneiden, siehe die Abbildung

Zu zeigen ist nun, dass die Gleichung von Ceva gilt: $\frac{|AY|}{|YC|} \cdot \frac{|CX|}{|XB|} \cdot \frac{|BZ|}{|ZA|} = 1$.

Zuerst wenden wir den Satz von Menelaus auf die Dreiecke ACZ (mit der Geraden $L(B, Y)$) und BCZ (mit der Geraden $L(A, X)$) an:

für ACZ: $\frac{\overrightarrow{AY}}{\overrightarrow{YC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{PZ}} \cdot \frac{\overrightarrow{ZB}}{\overrightarrow{BA}} = 1$ und

für BCZ: $\frac{\overrightarrow{ZP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CX}}{\overrightarrow{XB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{AZ}} = 1$.

Wir multiplizieren diese beiden Gleichungen miteinander und erhalten:

$$\frac{\overrightarrow{AY}}{\overrightarrow{YC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{PZ}} \cdot \frac{\overrightarrow{ZB}}{\overrightarrow{BA}} \cdot \frac{\overrightarrow{ZP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CX}}{\overrightarrow{XB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{AZ}} = \frac{\overrightarrow{AY}}{\overrightarrow{YC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CX}}{\overrightarrow{XB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BZ}}{\overrightarrow{ZA}} = 1.$$

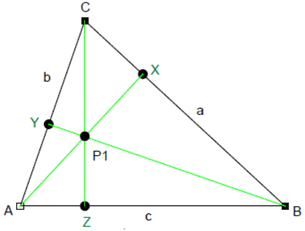
Aus dieser Gleichung bekommen wir die gewünchte Aussage, □

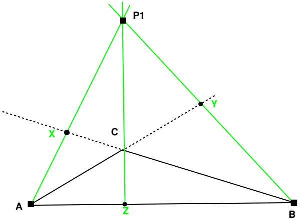
Bemerkung. Wir sehen, dass der Satz von Ceva auch in der "vektoriellen" Form, also mit Teilverhältnis, gilt: $\frac{\overrightarrow{AY}}{\overrightarrow{YC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CX}}{\overrightarrow{XB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BZ}}{\overrightarrow{ZA}} = 1$.

Folgerung 3 aus Satz von Ceva gilt auch für stumpfwinkligen Dreiecke

Bemerkung. Wir sehen, dass der Satz von Ceva auch in der "vektoriellen" Form, also mit Teilverhältnis, gilt: $\frac{\overrightarrow{AY}}{\overrightarrow{YC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CX}}{\overrightarrow{XB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BZ}}{\overrightarrow{ZA}} = 1.$

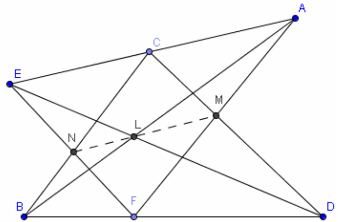
Folgerung 3. Die Ecktransversalen, die auf den gegenüberliegenden Seiten senkrecht stehen (="Höhen"), schneiden sich in einem Punkt. Beweis von Folgerung 3, den wir für spitzwinklige Dreiecke gemacht haben, gilt auch für stumpfwinkligen, wenn wir den Satz von Ceva in der vektoriellen Form benutzen.

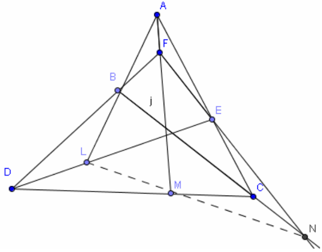




Satz von Pappus: projektive (allgemeinere) Version

Satz von Pappus. A, C und E seien drei auf einer Geraden liegende Punkte, B, D und F seien drei Punkte auf einer anderen Geraden. Dann liegen die drei Schnittpunkte L, M und N der Geraden $L(A, B)$ und $L(D, E)$, $L(C, D)$ und $L(F, A)$, $L(E, F)$ und $L(B, C)$ ebenfalls auf einer Geraden.

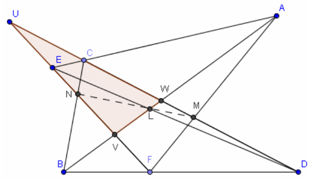




Bei diesem Satz von Pappus handelt es sich um einen Satz, der sich ohne Längenmessung oder Winkelmessung und selbst ohne Bezug auf Anordnung bezieht (d.h., nur die Inzidenzeigenschaften sind gefragt). In jedem Tripel kollinearer Punkte ist es gleichgültig, welcher Punkt zwischen den anderen liegt. Genauso wie die Abbildung oben, zeigt auch die Abbildung links eine Darstellung des Satzes von Pappus. Wir können also die Buchstaben A, B, C, D, E, F zyklisch vertauschen, vorausgesetzt wir benennen folgerichtig die Punkte L, M und N um.

Beweis

Wir nehmen an, dass die drei Geraden $L(A,B)$, $L(C,D)$ und $L(E,F)$ wie in der Abbildung ein Dreieck UVW bilden.



Wir wollen nun *beweisen, dass die Punkte L, M und N wirklich kollinear sind*.

Um den Satz von Pappus zu beweisen, wenden wir nun den Satz von Menelaus auf die Punktetripel (L,D,E), (A,M,F), (B,C,N), (A,C,E) und (B,D,F) auf den Seiten des in der Abbildung dargestellten Dreiecks UVW an. Wir erhalten damit:

$$\frac{\overrightarrow{VL}}{\overrightarrow{LW}}\cdot\frac{\overrightarrow{WD}}{\overrightarrow{DU}}\cdot\frac{\overrightarrow{UE}}{\overrightarrow{EV}}=1;\ \frac{\overrightarrow{VA}}{\overrightarrow{AW}}\cdot\frac{\overrightarrow{WM}}{\overrightarrow{MU}}\cdot\frac{\overrightarrow{UF}}{\overrightarrow{FV}}=1\ ;\frac{\overrightarrow{VB}}{\overrightarrow{BW}}\cdot\frac{\overrightarrow{WC}}{\overrightarrow{CU}}\cdot\frac{\overrightarrow{UN}}{\overrightarrow{NV}}=1\quad;$$

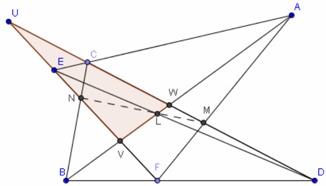
$$\frac{\overrightarrow{VA}}{\overrightarrow{AW}}\cdot\frac{\overrightarrow{WC}}{\overrightarrow{CU}}\cdot\frac{\overrightarrow{UE}}{\overrightarrow{EV}}=1\ ;\ \frac{\overrightarrow{VB}}{\overrightarrow{BW}}\cdot\frac{\overrightarrow{WD}}{\overrightarrow{DU}}\cdot\frac{\overrightarrow{UF}}{\overrightarrow{FV}}=1\ .$$

Wir dividieren nun das Produkt der ersten drei Ausdrücke durch das Produkt der beiden letzten, und erhalten:

$$\frac{\overrightarrow{VL}}{\overrightarrow{LW}}\cdot\frac{\overrightarrow{WD}}{\overrightarrow{DU}}\cdot\frac{\overrightarrow{UE}}{\overrightarrow{EV}}\cdot\frac{\overrightarrow{VA}}{\overrightarrow{AW}}\cdot\frac{\overrightarrow{WM}}{\overrightarrow{MU}|}\cdot\frac{\overrightarrow{UF}}{\overrightarrow{FV}}\cdot\frac{\overrightarrow{VB}}{\overrightarrow{BW}}\cdot\frac{\overrightarrow{WC}}{\overrightarrow{CU}}\cdot\frac{\overrightarrow{UN}}{\overrightarrow{NV}}\cdot\frac{\overrightarrow{AW}}{\overrightarrow{VA}}\cdot\frac{\overrightarrow{CU}}{\overrightarrow{WC}}\cdot\frac{\overrightarrow{EV}}{\overrightarrow{UE}}\cdot\frac{\overrightarrow{BW}}{\overrightarrow{VB}}\cdot\frac{\overrightarrow{DU}}{\overrightarrow{WD}}\cdot\frac{\overrightarrow{FV}}{\overrightarrow{UF}}=1$$

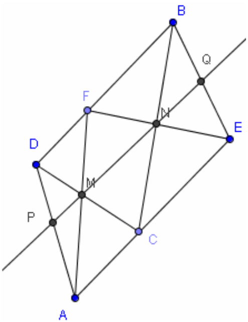
Nach einem mächtigen Kürzen ergibt sich: $\frac{\overrightarrow{VL}}{\overrightarrow{LW}}\cdot\frac{\overrightarrow{WM}}{\overrightarrow{MU}}\cdot\frac{\overrightarrow{UN}}{\overrightarrow{NV}}=1$

Nach einem mächtigen Kürzen ergibt sich: $\frac{\overrightarrow{VL}}{\overrightarrow{LW}} \cdot \frac{\overrightarrow{WM}}{\overrightarrow{MU}} \cdot \frac{\overrightarrow{UN}}{\overrightarrow{NV}} = 1$



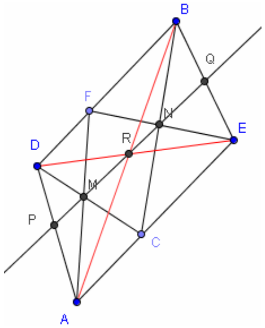
Wenden wir nun den Umkehrsatz von Menelaus an, folgt aus dieser Gleichung, dass die Punkte L, M und N kollinear sind, $\square$

Eine Anwendung des Satz von Pappos



Beispielaufgabe: Gegeben seien zwei Punkte C und F, die auf den Seiten AE bzw. BD eines Parallelogramms $AEBD$ liegen. Mit M und N seien die Schnittpunkte von CD mit FA sowie EF mit BC bezeichnet. Die Gerade $L(M, N)$ soll DA in P und EB in Q schneiden. Man beweise nun, dass $AP \equiv BQ$ gilt.

Eine Anwendung des Satz von Pappos



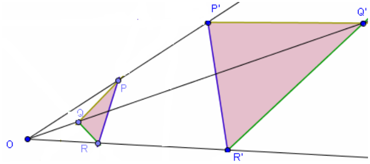
Beispielaufgabe: Gegeben seien zwei Punkte C und F, die auf den Seiten AE bzw. BD eines Parallelogramms $AEBD$ liegen. Mit M und N seien die Schnittpunkte von CD mit FA sowie EF mit BC bezeichnet. Die Gerade $L(M, N)$ soll DA in P und EB in Q schneiden. Man beweise nun, dass $AP \equiv BQ$ gilt.

Lösung: Wir zeichnen zuerst die Diagonalen des Parallelogramms ein: Durch das Einzeichnen der Diagonalen entsteht der Schnittpunkt R. Nach dem Satz von Pappus geht $L(M, N)$ durch das Zentrum R. Mit Hilfe der Strahlensätze folgt nun: $L(M, N)$ teilt die gegenüberliegenden Seiten in paarweise gleich lange Strecken. Daher gilt: $AP \equiv BQ$, $\square$

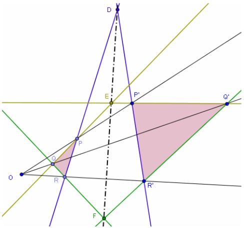
Der Satz von Desargues

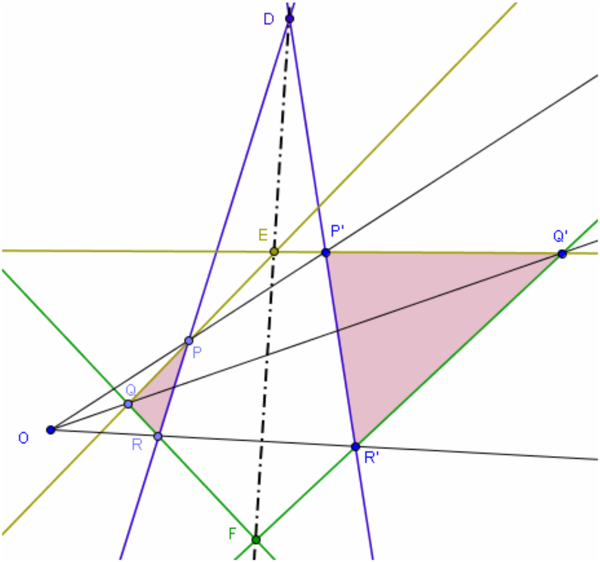
Die geometrische Theorie der Perspektive wurde begründet von dem Architekten Filippo Brunelleschi (1377-1446), der die achteckige Kuppel des Doms in Florenz und den Pitti – Palast entwarf. Diese Theorie wurde von einem anderen Architekten vertieft, nämlich von Girard Desargues  (1591-1661), dessen „Zwei-Dreiecke“ – Satz später als so bedeutend erkannt wurde, wie der Satz von Pappus.

Def. Zwei Punktetripel (Q, P, R) und (Q', P', R') sind perspektiv bzgl. des Punktes O, falls die Geraden $L(P, P'), L(R, R'), L(Q, Q')$ den Punkt O enthalten.

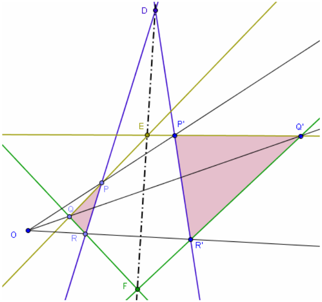


Satz von Desargues. Sind zwei Dreiecke perspektiv bezüglich eines Punktes und schneiden sich die Paare entsprechender Seiten, dann liegen die drei Schnittpunkte auf einer Geraden.




D
E
P'
Q'
P
Q
O
R
R'
F

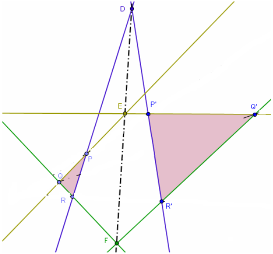
Beweis des Satzes von Desargues



Wir wenden wieder den Satz von Menelaus auf die drei Punktetripel (F, R', Q'), (E, P', R'), (D, Q', P') auf den Seiten der drei Dreiecke OQR, ORP, OPQ an und erhalten: $\frac{\overrightarrow{QD}}{\overrightarrow{RD}} \cdot \frac{\overrightarrow{RR'}}{\overrightarrow{OR'}} \cdot \frac{\overrightarrow{OQ'}}{\overrightarrow{QQ'}} = 1$; $\frac{\overrightarrow{RE}}{\overrightarrow{PE}} \cdot \frac{\overrightarrow{PP'}}{\overrightarrow{OP'}} \cdot \frac{\overrightarrow{OR'}}{\overrightarrow{RR'}} = 1$; $\frac{\overrightarrow{PF}}{\overrightarrow{QF}} \cdot \frac{\overrightarrow{QQ'}}{\overrightarrow{OQ'}} \cdot \frac{\overrightarrow{OP'}}{\overrightarrow{PP'}} = 1$. Nach ausmultiplizieren und kürzen ergibt sich damit:
$\frac{\overrightarrow{QD}}{\overrightarrow{RD}} \cdot \frac{\overrightarrow{RE}}{\overrightarrow{PE}} \cdot \frac{\overrightarrow{PF}}{\overrightarrow{QF}} = 1$. Nach dem Umkehrsatz von Menelaus ergibt sich, dass D, E und F kollinear sind, $\square$

Umkehrsatz des Satzes von Desargues

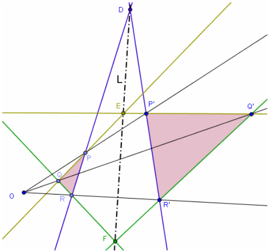
Def. Zwei Punktetripel (Q, P, R) und (Q', P', R') sind perspektiv bzgl. einer Geraden L, falls die Schnittpunkte $E := L(Q, P) \cap L(Q', P')$, $D := L(Q, R) \cap L(Q', R')$, $F := L(R, P) \cap L(R', P')$ auf der Geraden L liegen.



Umkehrsatz des Satzes von Desargues Sind zwei Dreiecke perspektiv bezüglich einer Geraden und schneiden sich zwei der Verbindungsgeraden entsprechender Ecken, so gehen alle drei Verbindungsgeraden durch einen Punkt und die Dreiecke sind bezüglich dieses Punktes perspektiv.

Beweis des Umkehrsatzes des Satzes von Desargues

Umkehrsatz des Satzes von Desargues Sind zwei Dreiecke perspektiv bezüglich einer Geraden und schneiden sich zwei der Verbindungsgeraden entsprechender Ecken, so gehen alle drei Verbindungsgeraden durch einen Punkt und die Dreiecke sind bezüglich dieses Punktes perspektiv.



Beweis: Die Dreiecke PQR und $P'Q'R'$ seien bezgl. der Geraden L perspektiv. Dann sind die Punkte $D := L(Q,R) \cap L(Q',R')$, $F := L(R,P) \cap L(R',P')$, $E = L(P,Q) \cap L(P',Q')$, wie in der Abbildung links kollinear.
Setzen wir $O = L(P,P') \cap L(R,R')$, so wollen wir beweisen, dass (O,Q,Q') ein kollineares Punktetripel ist.

Da die Dreiecke EPP' und FRR' perspektiv bezüglich D sind, können wir den Satz von Desargues auf sie anwenden und schlußfolgern, dass die Schnittpunkte von Paaren entsprechender Seiten, nämlich
$O = L(P,P') \cap L(R,R')$, $Q' = L(P',E) \cap L(R',F)$,
$Q = L(F,P) \cap L(E,R)$ kollinear sind , $\square$