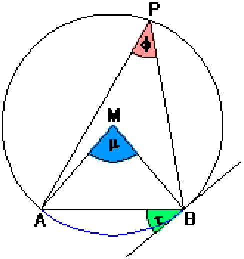
Kreiswinkelsatz

Gegeben sei ein Kreisbogen mit den voneinander verschiedenen Endpunkten A und B.

Def. von Umfangswinkel, Mittelpunktswinkel, Sehnentangentenwinkel



Umfangswinkel nennt man einen Winkel $\angle(A, P, B)$, dessen Scheitel P auf demjenigen Kreisbogen liegt, der den gegebenen Kreisbogen zum vollständigen Kreis ergänzt (ϕ auf dem Bild).

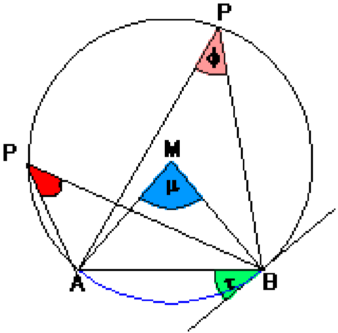
Ist M der Mittelpunkt des gegebenen Kreisbogens, so bezeichnet man den Winkel $\angle(A, M, B)$ als den zugehörigen Mittelpunktswinkel (μ auf dem Bild).

Ein Sehnentangentenwinkel zum gegebenen Kreisbogen wird begrenzt von der Sehne AB und der Kreistangente im Punkt A bzw. B.

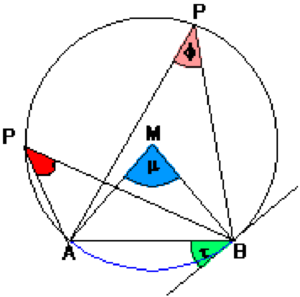
Kreiswinkelsatz Der Mittelpunktswinkel eines Kreisbogens ist doppelt so groß wie einer der zugehörigen Umfangswinkel.

Folgerung: Zwei Umfangswinkel mit gleichem Kreisbogen sind gleich groß (kongruent)

Beweis. Weil die beiden gleich der Hälfte vom Mittelpunktswinkel sind.



Sehnentangentenwinkel



Winkel τ auf dem Bild heißt Sehnentangentenwinkel (wird begrenzt von der Sehne AB und der Kreistangente im Punkt B).

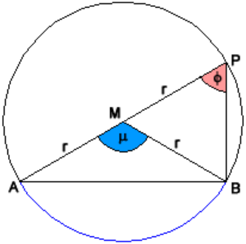
Folgerung. Sehnentangentenwinkel ist gleich Umfangswinkel.

Beweis. Dreieck Δ_{AMB} ist gleichschenklig; dann ist $\measuredangle MBA = \frac{180^\circ - \mu}{2} = 90^\circ - \phi$. Weil Winkel zwischen Tangente und Radius ein Rechter Winkel ist, ist $\tau + \measuredangle MBA = 90^\circ$. Aus diesen zwei Gleichungen folgt $\tau = \phi$.

Bemerkung. Wir haben noch nicht die Kreistangente definiert. Die Schuldefinition: Tangente ist eine Gerade, die den Kreis in genau einem Punkt schneidet. Aus dieser Definition folgt auch, dass die Tangente orthogonal zum Radius steht, weil der einzige Schnittpunkt der Tangente mit dem Kreis der Lotpunkt des Mittelpunktes der Kreises auf der Geraden ist.
Wir werden in dieser Woche Tangente zur beliebigen (regulären) Kurve definieren und Kreis als Beispiel betrachten, die "differentialgeometriesche" Definition der Tangente stimmt mit der Schuldefinition im Fall des Kreises überein.

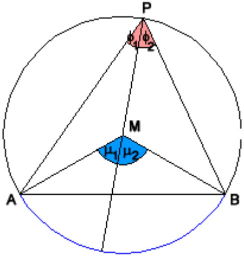
Kreiswinkelsatz Der Mittelpunktswinkel eines Kreisbogens ist doppelt so groß wie einer der zugehörigen Umfangswinkel.

Beweis: Spezialfall: Mittelpunkt liegt auf einer Seite



Die beiden Winkel bei B und P sind als Basiswinkel in dem gleichschenkligen Dreieck MBP gleich groß (einfach zu zeigen mit Kongruenzsätzen). Der dritte Winkel des Dreiecks MBP (mit dem Scheitel M) hat die Größe $180° - \mu$. Der Satz über die Winkelsumme ergibt folglich $\phi + \phi + (180° - \mu) = 180°$ und weiter, wie behauptet, $2\phi = \mu$.

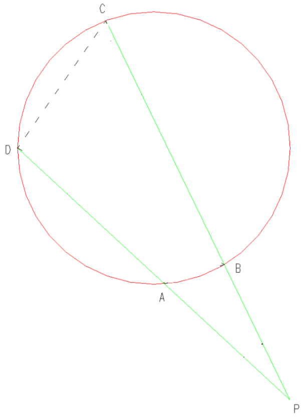
Im allgemeinen Fall liegt M nicht auf einem Schenkel des Umfangswinkels. Es gibt drei Fälle, die analog zueinander sind. Auf dem Bild ist der Fall gezeigt, wenn die Gerade $L(P, M)$ den Umfangswinkel und den Mittelpunktswinkel in zwei Winkel (ϕ_1 und ϕ_2 bzw. μ_1 und μ_2) teilt.



für die jeweils einzeln die Aussage gilt, da die Voraussetzungen des bewiesenen Spezialfalls erfüllt sind: $\mu_1 = 2\phi_1$ und $\mu_2 = 2\phi_2$. Deshalb ist $2\phi := 2\phi_1 + 2\phi_2 = \mu_1 + \mu_2 = \mu$, $\square$.

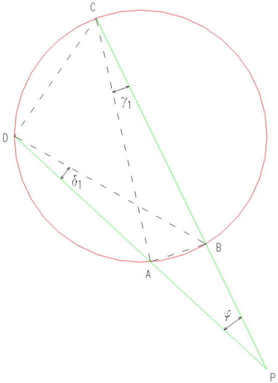
Anwendungen des Kreiswinkelsatzes: Sekantensatz

Sekantensatz. Schneiden sich zwei Sekanten (=Geraden, die Kreis schneiden) außerhalb des Kreises in einem Punkt P, so ist das Produkt der Abschnittslängen vom Sekantenschnittpunkt bis zu den beiden Schnittpunkten von Kreis und Sekante auf beiden Sekanten gleich groß.



Noch einmal, jetzt mit Bezeichnungen für die Schnittpunkte. Gegeben sei ein Kreis mit zwei Sekanten, die sich in einem Punkt P außerhalb des Kreises schneiden. Bezeichnet man die Schnittpunkte des Kreises mit der einen Sekante als A beziehungsweise D und die Schnittpunkte mit der anderen Sekante als B beziehungsweise C, so gilt:
$AP| \cdot |DP| = |BP| \cdot |CP|$

Beweis des Sekantensatz



Sekantensatz. Gegeben sei ein Kreis mit zwei Sekanten, die sich in einem Punkt P außerhalb des Kreises schneiden. Bezeichnet man die Schnittpunkte des Kreises mit der einen Sekante als A beziehungsweise D und die Schnittpunkte mit der anderen Sekante als B beziehungsweise C, so gilt:
$|AP| \cdot |DP| = |BP| \cdot |CP|$

Beweis. Die Dreiecke APC und BPD sind ähnliche Dreiecke nach WW-Ähnlichkeitssatz, denn:

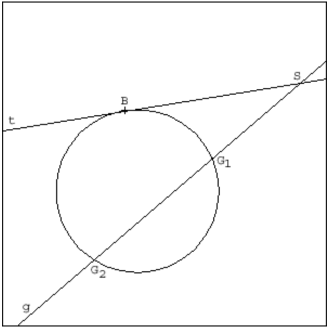
- Der Winkel im Punkt P ist beiden Dreiecken gemeinsam.
- Die Umfangswinkel über einer Sehne sind gleich groß. Anwendung dieses Satzes auf die Sehne AB ergibt $\delta_1 = \gamma_1$.

Daraus ergibt sich die Verhältnisgleichung

$$\frac{|AP|}{|BP|} = \frac{|CP|}{|DP|}$$

Durch Multiplikation mit $|BP| \cdot |DP|$ erhält man:

$$|AP| \cdot |DP| = |BP| \cdot |CP| \quad \square$$



Folgerung. Sekanten-Tangenten-Satz. Gegeben sei ein Kreis k mit einer Sekante g und einer Tangente t, die sich in einem Punkt S außerhalb des Kreises schneiden. Bezeichnet man die Schnittpunkte des Kreises k mit g als G_1 beziehungsweise G_2 und den Berührpunkt der Tangente als B, so gilt:

$$|SG_1| \cdot |SG_2| = |SB|^2.$$

Man kann den Sekanten-Tangenten-Satz analog zum Sekantensatz beweisen: die Dreiecke Δ_{G_1BS} und Δ_{BG_2S} sind ähnlich nach WW-Ähnlichkeitssatz: Winkel $\angle BSG_1$ ist gemeinsamer Winkel, und Umfangwinkel $\angle BG_2S$ ist gleich Sehnentangentenwinkel $\angle G_1BS$.

Alternativ, kann man Sekanten-Tangenten-Satz als Grenzfall vom Sekantensatz betrachten; Beweis geht dann über Grenzwertübergang.
Bemerkung. Sekantensatz folgt selbstverständlich aus Sekanten-Tangenten-Satz, weil für jede Sekante durch S die rechte Seite der Gleichung $|SG_1| \cdot |SG_2| = |SB|^2$ konstant ist. Deswegen hängt auch die linke Seite nicht von Wahl der Sekanten durch S ab.