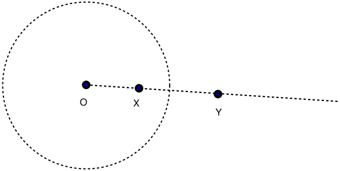
Neues Thema: Inversion am Kreis (Kreisspiegelung)

Wir arbeiten in $\left(\mathbb{R}^2, \langle\ ,\ \rangle_{standard}\right)$.

Def. Betrachte einen Kreis um O vom Radius $r > 0$. Inversion (bzgl. des Kreises) ist eine Abbildung $I_{O,r} : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, die Punkt X auf den Punkt Y abbildet, s.d. $\overrightarrow{OY} = \frac{r^2}{|OX|^2} \cdot \overrightarrow{OX}$.



Koordinatendarstellung:

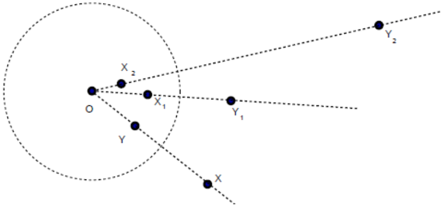
Für $O = \binom{x_0}{y_0}$, $X = \binom{x}{y}$.

Dann ist $Y = O + \overrightarrow{OY} = \binom{x_0}{y_0} + \frac{r^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \binom{x - x_0}{y - y_0}$

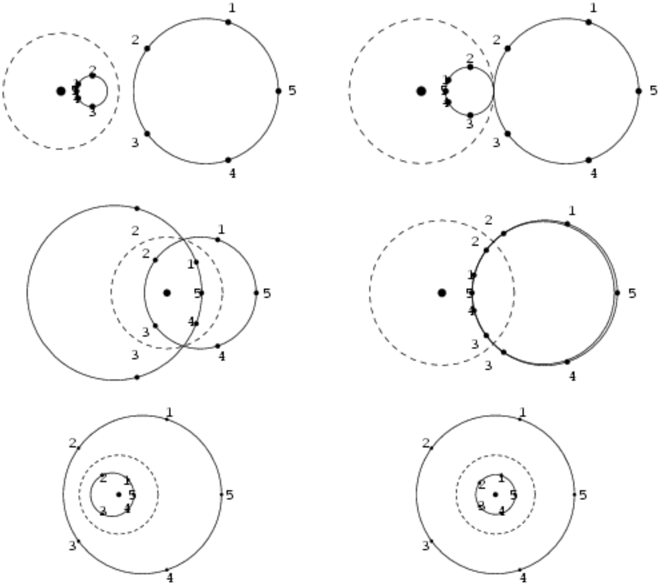
Bemerkung $|OY| = \frac{r^2}{|OX|^2}|OX| = \frac{r^2}{|OX|}$. Also, $|OY| \cdot |OX| = r^2$

Geometrische Beschreibung der Lage von Y:

- O, X, Y liegen auf einem Strahl mit Anfangspunkt O.
- $|OY| \cdot |OX| = r^2$



Bemerkung Inversion ist eine Bijektion (als Abbildung des $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ auf sich selbst.)



Einfachste Eigenschaften und komplexe Zahlen

Einfachste Eigenschaften:

1. Liegt X auf dem Kreis um O vom Radius r, so ist $I_{O,r}(X) = X$.
2. I ist eine Involution: $I \circ I = Id$.
3. I bildet innere Punkte des Kreises auf äussere ab und umgekehrt.
4. I kommutiert mit Isometrien: Ist $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Isometrie, so ist $I_{F(O),r}(F(X)) = F(I_{O,r}(X))$

Falls $O = \binom{0}{0}$ ist, und $r = 1$, so ist die Inversion gegeben durch $I\binom{x}{y} = \frac{1}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$. Falls wir $z = x + i \cdot y$ setzen, wird die Inversion wie folgt gegeben:
$I(z) = \frac{z}{|z|^2} := \frac{1}{\bar{z}}$, wobei $\bar{z}$ die komplexe Konjugation ist (da $\frac{1}{z} \overset{\text{Ana I}}{=} \frac{x-i\cdot y}{x^2+y^2}$ und deswegen $\frac{1}{\bar{z}} = \frac{x+i\cdot y}{x^2+y^2}$.)
Man bedenke auch, dass die Konjugation, also die Abbildung $z = x + iy \mapsto \bar{z} = x - iy$ die Spiegelung bzgl. der Geraden $L_{\vec{0},\binom{1}{0}}$ ist.

Inversion als Bijektion von $\mathbb{R}^2 \cup \infty$

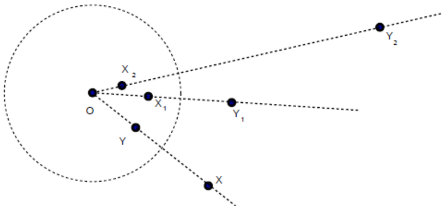
Betrachte verallgemeinerte Ebene $\bar{\mathbb{R}}^2 := \mathbb{R}^2 \cup \underbrace{\infty}_{\text{ein formaler Punkt}}$. Dann definiere die Inversion $I : \bar{\mathbb{R}}^2 \to \bar{\mathbb{R}}^2$ wie folgt:

$$I(X) = \begin{cases} Y \text{ s.d. } \overrightarrow{OY} = \frac{r^2}{|OX|^2} \cdot \overrightarrow{OX} \text{ für } X \neq O, \infty \\ \infty \text{ falls } X = O \\ O \text{ falls } X = \infty \end{cases}$$

Inversion ist eine bijektive Abbildung der verallgemeinerten Ebene auf sich selbst.

Frage Warum die Bezeichnung ∞?

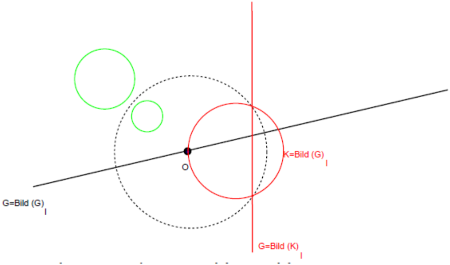
Antwort: Wir brauchen einen künstlichen Punkt, um $I(O)$ zu definieren. Je näher X an O ist, je weiter ist $I(X)$ von O entfernt. (Weil $|OY| = \frac{r^2}{|OX|}$). Man kann sich $I(O)$ als unendlichen Punkt vorstellen, daher die Bezeichnung.



Def. Ein verallgemeinerter Kreis ist ein Kreis (vom Radius > 0), oder die Vereinigung $\underbrace{G \cup \infty}_{\text{verallgemeinerte Gerade}}$, wobei G eine Gerade ist.

Lemma 19. *Inversion bildet verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise ab. Ferner gilt:*

- *Inversion $I_{O,r}$ überführt alle verallgemeinerten Geraden, die O enthalten, in sich selbst,*
- *und andere verallgemeinerte Geraden in Kreise, die O enthalten.*
- *Inversion überführt die Kreise, die O enthalten, in verallgemeinerte Geraden,*
- *und andere Kreise in Kreise.*

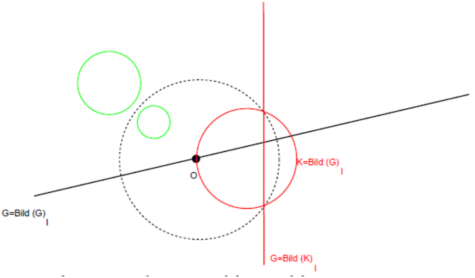


Def. Ein verallgemeinerter Kreis ist ein Kreis (vom Radius > 0), oder die Vereinigung $\underbrace{G \cup \infty}_{\text{verallgemeinerte Gerade}}$,

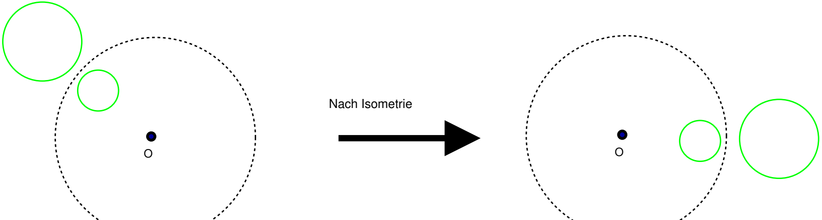
wobei G eine Gerade ist.

Lemma 19. *Inversion bildet verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise ab. Ferner gilt:*

- *Inversion $I_{O,r}$ überführt alle verallgemeinerten Geraden, die O enthalten, in sich selbst,*
- *und andere verallgemeinerte Geraden in Kreise, die O enthalten.*
- *Inversion überführt die Kreise, die O enthalten, in verallgemeinerte Geraden,*
- *und andere Kreise in Kreise.*



Beweis Betrachten eine Inversion $I_{O,r}$ und einen Kreis K. Da Inversion mit Isometrien kommutiert, genügt es die Aussage des Lemmas für $I_{F(O),r}$ und den Kreis $Bild_F(K)$ zu beweisen, wobei F eine Isometrie ist.



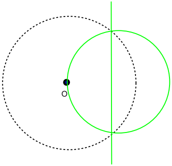
Also sei $O = \binom{0}{0}$ (und deswegen ist $I\binom{x}{y} = \frac{r^2}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$,) und der zu untersuchende Kreis sei $K := \{\binom{x}{y} s.d. (x - x_c)^2 + y^2 - R^2 = 0\}$.

Da $I \circ I = Id$, besteht $Bild_I(K)$ aus allen Punkten, die auf Punkte von K abgebildet werden, also aus allen Lösungen der Gleichung

$\left(\frac{r^2}{x^2+y^2}x - x_c\right)^2 + \left(\frac{r^2}{x^2+y^2}y\right)^2 - R^2 = 0$. Multiplizieren mit $-(x^2 + y^2)$ ergibt

$$\underbrace{(x^2 + y^2)(R^2 - x_c^2)}_{(x \;\; y)\begin{pmatrix} R^2 - x_c^2 & \\ & R^2 - x_c^2 \end{pmatrix}\binom{x}{y}} + \underbrace{2r^2x_c}_{a_1} \cdot x = r^4 \qquad (*)$$

Ist $R^2 \neq x_c^2$, so hat $\begin{pmatrix} R^2 - x_c^2 & \\ & R^2 - x_c^2 \end{pmatrix}$ zwei gleiche Eigenwerte, und ist $(*)$ die Gleichung eines Kreises (wiederholt auf der nächsten Seite).
($\varnothing$ und Punkt sind ausgeschlossen, weil K mehr als einen Punkt hat.)
Ist $R^2 = x_c^2$, was bedeutet, das K durch O geht,



so ist $(*) \iff 2x_c \cdot x = r^2$, und dies ist die Gleichung der Gerade.

Beweis für die Geraden, die durch O gehen kann man ähnlich bekommen. Diese Aussage ist jedoch aus geometrischen Gründen offensichtlich $\square$

Nachtrag: warum ist die Menge der Lösungen der Gleichung $x^2 + y^2 + ax + by = d$ ein Kreis, ein Punkt oder die leere Menge?

Motivation: Auf der vorherigen Seite hatten wir die Gleichung $(R^2 - x_c^2)(x^2 + y^2) + 2r^2 x_c \cdot x = r^4$, wir haben behauptet, dass die Menge ein Kreis ist.

Erklärung. Man kann die Gleichung wie folgt algebraisch umformen:

$$x^2 + y^2 + ax + by = d \iff \left(x + \tfrac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \tfrac{b}{2}\right)^2 = d + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}.$$

Die letzte Gleichung ist die Gleichung des Kreises mit Zentrum im $\begin{pmatrix} -a/2 \\ -b/2 \end{pmatrix}$ und Radius $\sqrt{d + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}}$ (falls $d + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} > 0$) bzw. einer Menge, welche aus einem Punkt besteht (wenn $d + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} = 0$) bzw. die leeren Menge (wenn $d + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} < 0$).