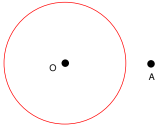
Pläne

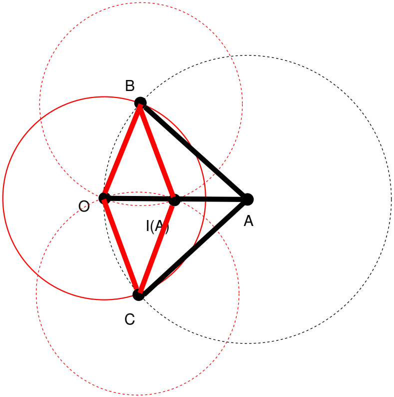
- Hauptziel: Konstruktionen mir der Zirkel allein, ohne dem Lineal
  - Wir werden Satz von Mohr-Mascheroni beweisen. Der Satz besagt, dass jede Konstruktion, welche mit Zirkel und Lineal machbar ist, ist allein mit Zirkel machbar. Das machen wir in Abschnitt (b), Foliensatz 9b.
- Dieser Abschnitt 9a ist eine Vorbereitung:
  - wir zeigen, dass man allein mit Zirkel für den gegebenen Punkt A und für die gegebenen O, r den Punkt $I_{O,r}(A)$ konstruieren kann.
  - Außerdem erklären wir, wie man für den gegebenen Kreis den Mittelpunkt konstruieren kann. Diese Konstruktion wird im Abschnitt 9b eine grosse Rolle spielen. Außerdem ist das Problem ein Spezialfall des Problems von Appolonium.
- Im Video 9c Lösen wir den allgemeinen Fall das Problems von Appolonium.

Konstruktion des Punktes $I_{O,r}(A)$ nur mit Zirkel.

Frage O, r, A sind gegeben. Kann man $I_{O,r}(A)$ mit Zirkel und Lineal konstruieren?
Antwort Man kann $I_{O,r}(A)$ sogar nur mit Zirkel konstruieren.

Fall 1: $|OA| > r$





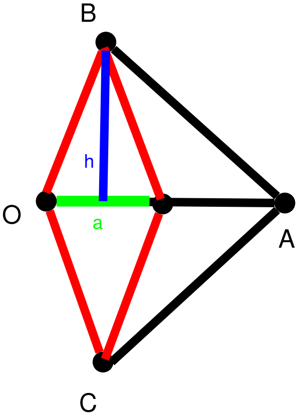
Zeichne den Kreis um A mit Radius $R = |OA|$. Zeichne die Kreise um B und um c vom Radius r. **Behauptung:** Deren Schnittpunkt ist $I(A)$.

Gleichlange Strecken werden mit gleichen Farben bezeichnet: schwarze haben die Länge R, rote – r. Z.z.: 2. Schnittpunkt der Kreise ist $I(A)$.

Z.z.: $a \cdot R = r^2$ Wir rechnen die Höhe h zweimal aus:

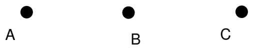
$$r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h^2 = R^2 - \left(R - \frac{a}{2}\right)^2.$$

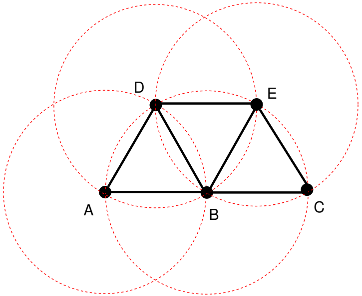
Dann ist $a \cdot R = r^2$, $\square$



Fall 2: $|OA| < r$

Hilfskonstruktion *Man kann nur mit Zirkel eine Strecke verdoppeln.* (Gegeben sind zwei Punkte A, B. Kann man nur mit Zirkel $C \in \mathcal{G}_{A,B}$ konstruieren, s.d. $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$.)



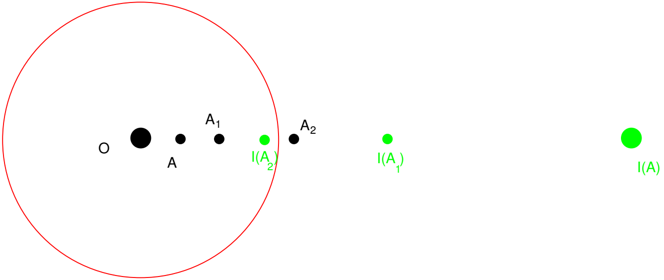


Konstruktion Zeichne Kreise um A, B vom Radius $r := |AB|$. Deren Schnittpunkt sei D. Zeichne Kreis um D vom Radius r. Deren Schnittpunkt mit dem Kreis um B sei E.

Zeichne Kreis um E vom Radius r. Deren Schnitpunkt mit dem Kreis um B sei C. Da alle gezeichneten Strecken die gleiche Länge $r = |AB|$ haben, sind die Winkel $\angle ABD = \angle DBE = \angle EBC = \frac{\pi}{3}$, und deswegen liegen A, B, C auf einer Geraden

Fall 2: $|OA| < r$

Verdoppele die Strecke OA: Finde A_1, s.d. $\overrightarrow{OA_1} = 2 \cdot \overrightarrow{OA}$. Verdoppele OA_1: Finde A_2, s.d. $\overrightarrow{OA_2} = 2 \cdot \overrightarrow{OA_1} = 2^2 \cdot \overrightarrow{OA}$, u.s.w. Nach endlich vielen (z.B. k) Schritten ist $|OA_k| > r$. Konstruiere $I(A_k)$. Verdoppele $OI(A_k)$ k mal. Das Ergebnis ist $I(A)$.



(Weil $|OA_k| = 2^k |OA|$, und deswegen $|OI(A_k)| = 2^{-k} \frac{r^2}{|OA|}$, also bekommen wir nach k Verdoppelungen die Länge $\frac{r^2}{|OA|}$), $\square$

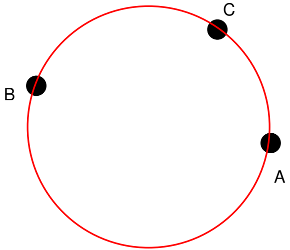
Das Problem von Appolonius

Aufgabe *Gegeben sind 3 verallgemeinerte Kreise (wir erlauben auch $r = 0$). Konstruiere einen Kreis, der alle Kreise berührt.*

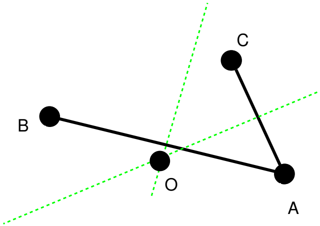
Apollonios von Perge war als “Der Grosse Geometer“ bekannt. Über sein Leben ist wenig bekannt, aber seine Arbeiten hatten grossen Einfluss auf die Entwicklung in der Mathematik. Speziell sein berühmtes Buch 'Conica' führt in für uns heute wohlbekannte Terme wie Parabel, Ellipse und Hyperbel ein.

In dieser Vorlesung betrachten wir nur die einfachste Situation: $r_1 = r_2 = r_3 = 0$, allgemeiner Fall kommt in Vorl9c

Aufgabe *Gegeben sind 3 Punkte A, B, C (die nicht auf einer Geraden liegen), man konstruiere einen Kreis durch die Punkte.*

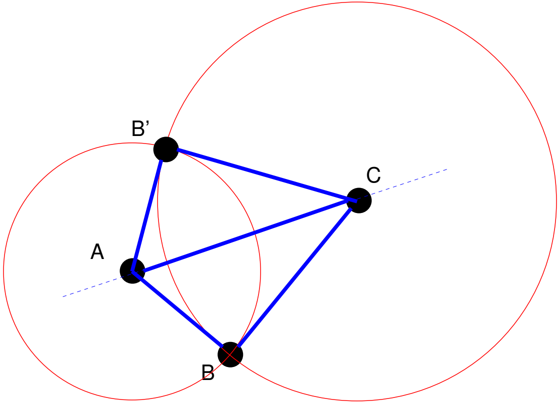


Lösung 1 Man konstruiere die Geraden, die orthogonal zu AB und AC sind und durch die Mittelpunkte der Strecken AB, AC gehen. Deren Schnittpunkt ist der Mittelpunkt des Kreises

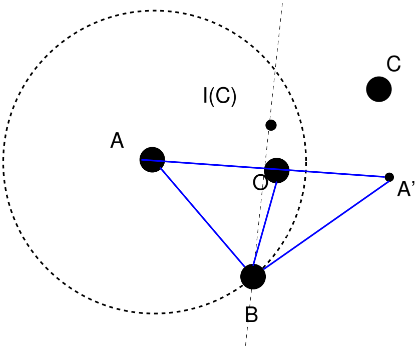


Hilfskonstruktion

Aufgabe Gegeben sind A, B, C. Spiegele B bzgl. AC. Zeichne den Kreis um A vom Radius $|AC|$ und um C vom Radius $|BC|$. Deren Schnittpunkt B' ist Spiegelung von B weil $ABC = AB'C$.



Lösung 2 Man kann den Punkt nur mit Zirkel konstruieren! Man zeichne den Kreis mit Zentrum in A und Radius $r = |AB|$. Konstruiere $I(C)$. Spiegele A bzgl. $BI(C)$ (das Ergebnis sei A'). $I_{O,r}(A')$ ist der Mittelpunkt des Kreises, der A, B, C enthält



Weil $|AO| \cdot |AA'| = |AB|^2$, und deswegen ABA' zu AOB ähnlich ist. Dann ist AOB auch gleichschenklig und $|AO| = |OB|$. Ebenso sind $A'I(C)A$ und AOC ähnlich und deswegen $|AO| = |OC|$.

Wichtige Folgerung *Man kann Inversion eines gegebenen Kreises nur mit Zirkel konstruieren.*

Konstruktion Gegeben sind ein Kreis S, ein Punkt O, und $r > 0$. Nehme 3 Punkte auf dem Kreis. Konstruiere deren Bilder nach Inversion (s. vorne). Das Bild des Kreises S soll die Punkte enthalten. Konstruiere den Kreis, auf dem die 3 Punkte liegen. Da die drei Punkte den Kreis eindeutig bestimmen, ist der Kreis das Bild von S