Konstruktionen nur mit Zirkel: Satz von Mohr-Mascheroni

Satz von Mohr-Mascheroni. *Jede geometrische Konstruktion, die mit Zirkel und Lineal durchgeführt werden kann, kann NUR mit Zirkel durchgeführt werden*

Konvention. Wir sagen, dass wir eine Gerade mit Zirkel konstruiert haben, falls wir 2 Punkte der Geraden konstruiert haben.

Wiederholung. Wir definieren den Begriff „konstruierbar“ durch die folgenden Festlegungen:
(a) Die Gerade durch zwei verschiedene gegebene Punkte ist konstruierbar. (b) Der Kreis um einen gegebenen Punkt dessen Radius gleich dem Abstand zwischen zwei gegebenen Punkten ist, ist konstruierbar.(c) Der Schnittpunkt von zwei sich schneidenden Geraden, (d) die Schnittpunkte eines gegebenen Kreises und einer den Kreis schneidenden gegebenen Geraden, (e) Die Schnittpunkte von zwei sich schneidenden gegebenen Kreisen sind konstruierbar.

Wir sagen dann, das Objekt a sei bei Vorgabe der Objekte $a_1, \ldots, a_k$ *konstruierbar*, wenn es Objekte $a_{k+1}, \ldots, a_n = a$ gibt, so dass a_j bei Vorgabe der Objekte $a_1, \ldots, a_{j-1}$ konstruierbar ist für $j = k+1, \ldots, n$.
Z.z.: alle 5 Basis-Konstruktionen (a,b,c,d,e) kann man nur mit Zirkel durchführen.

(a) folgt aus Konvention auf der vorherigen Seite. Wir zeigen aber, dann wenn wir zwei Punkten einer Geraden konstriert haben, dann können wir beliebig viele Punkten der Geraden konstruieren.

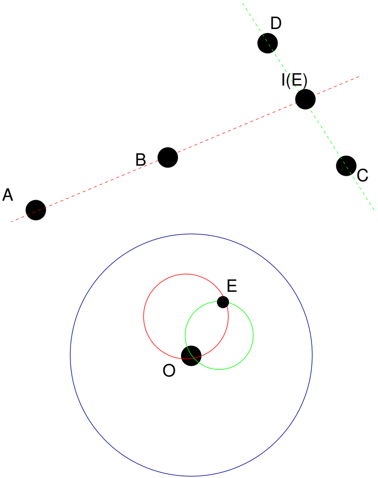
(b,e) sind trivial

(c,d) sind nichtrivial; wir zeigen wie man sie durchfürt in diesem Abschnitt.

(c): Der Schnittpunkt von zwei sich schneidenden Geraden

Aufgabe A, B, C, D sind gegeben. Man konstruiere (nur mit Zirkel) den Schnittpunkt der Geraden AB und CD.

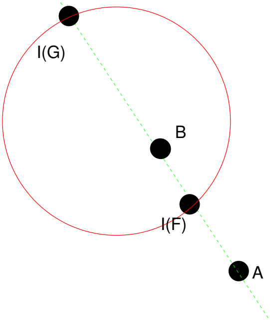
Lösung Nehme einen Kreis um einen beliebigen Punkt O. Konstruiere $I(A), I(B)$. Konstruiere den Kreis, auf dem $I(A), I(B), O$ liegen. Konstruiere $I(C), I(D)$. Konstruiere den Kreis, auf dem $I(C), I(D), O$ liegen. Sei E dessen Schnittpunkt. Dann ist $I(E)$ der Schnittpunkt der Geraden AB und CD. Weil $I \circ I = Id$, und $I(_{\text{Schnittpunct der Geraden}})$ auf den beiden Kreisen liegt, ist Schnittpunkt von Kreisen, von O verschieden.

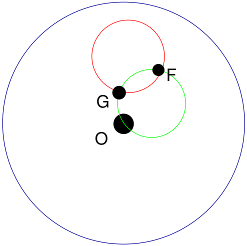


(d): Der Schnittpunkt eines Kreises und einer Geraden

Aufgabe A, B und ein Kreis sind gegeben. Man konstruiere (nur mit Zirkel) den Schnittpunkt der Geraden AB mit dem Kreis.

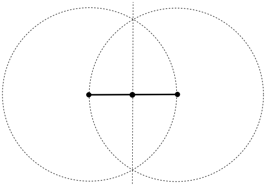
Lösung Nehme einen Kreis um einen Punkt O. Konstruiere $I(A), I(B))$. Konstruiere den Kreis, auf dem $I(A), I(B), O$ liegen. Nehme 3 Punkte C, D, E auf dem Kreis. Konstruiere $I(C), I(D), I(E)$. Konstruiere den Kreis, auf dem $I(C), I(D), I(E)$ liegen. Sei F, G Schnittpunkte vom Kreis und Kreis. Dann sind $I(E)$, $I(G)$ die Schnittpunkte von Geraden AB und Kreis. Weil $I \circ I = Id$ ist, und $I(\text{Schnittpunkt der Geraden und des Kreises})$ auf den beiden Kreisen liegt, ist das Schnittpunkt von Kreisen.



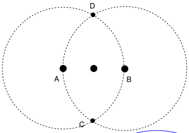


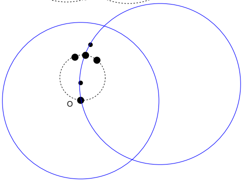
Bsp. Halbieren einer Strecke nur mit Zirkel

Wiederholung:
Halbieren einer Strecke mit Zirkel und Lineal



Jetzt dasselbe nur mit Zirkel: gegeben sind nur zwei Punkte. Wir müssen den Mittelpunkt der Strecken konstruieren





Zuerst wie mit Lineal: Wir müssen jetzt nur mit Zirkel den Schittpunkt der Strecke AB und CD finden.

Zeichne irgendwo einen Kreis. Invertiere Punkte A, B, C, D. Finde den Kreis, der $I(C), I(D), O$ enthält. Er ist das Bild der Geraden CD. Finde den Kreis, der $I(A), I(B), O$ enthält. Er ist das Bild der Geraden AB. Deren Schnittpunkt ist das Bild des Schnittpunktes der Geraden AB und CD. Und deswegen ist dessen Inversion der Schnittpunkt der Geraden AB und CD, also, der Mittelpunkt der Strecke AB.