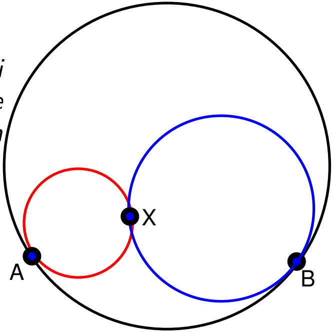
Plan

- Konstruktionen ohne Lineal haben wir abgeschlossen
- Wir wenden jetzt Inversionen an, um verschiedene elementar-geometrischen Aufgaben zu lösen
- Die Aufgaben sind verschieden, aber die Lösungsansätze sind immer gleich: die Aufgabestellung ändert sich nicht wenn wir eine Inversion anwenden. Wir wenden die passende Inversion (etwa welche die Kreisen, welche in der Aufgabestellung vorkommen in Geraden überführt) und vereinfachen damit die Aufgabe

Aufgabe *Gegeben sind ein Kreis S und zwei Punkte A und B auf S. Finden Sie alle Punkte X, s.d. es zwei Kreise S_A und S_B gibt mit den Eigenschaften*

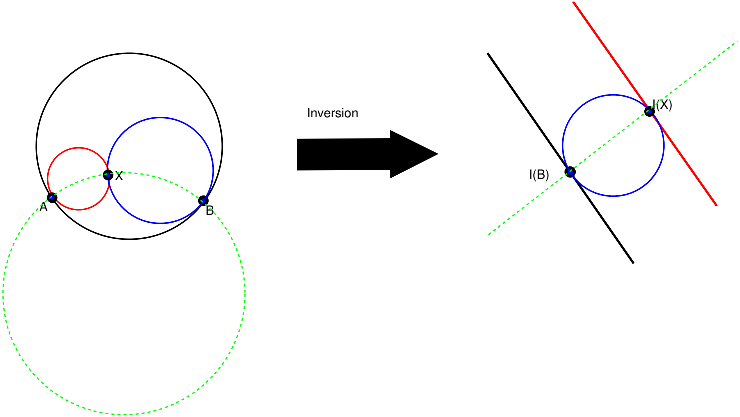
- S_A *berührt* S *in* A *und* S_B *in* X
- S_B *berührt* S *in* B.



Lösung Nach Inversion mit Zentrum in A wird das Bild wie folgt aussehen: Die Menge von allen $I(X)$ wird aus Punkten bestehen, die

- die Gerade $Bild_I(S)$ in $I(B)$ berühren
- und eine Gerade, die zu $Bild_I(S)$ parallel ist, berühren.

Offensichtlich besteht diese Menge aus den Punkten der Geraden. Also besteht die Menge der Punkte X aus der Aufgabe aus $Bild_I(Gerade)$ und ist der Kreis, der zu S in A und B orthogonal ist.



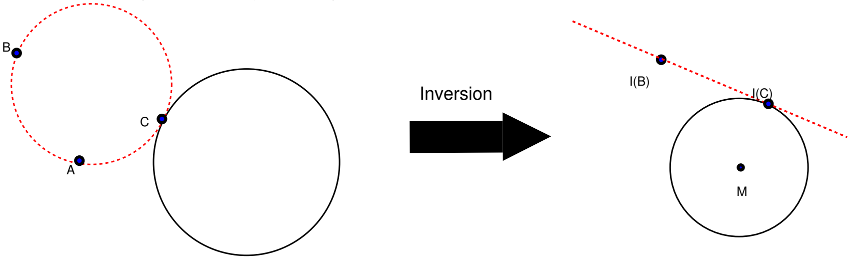
Das Problem von Appolonius

Aufgabe *Gegeben sind 3 verallgemeinerte Kreise (wir erlauben auch $r = 0$). Konstruiere einen Kreis, der alle Kreise berührt.*

Nach Inversion (mit Zentrum in einem Punkt, der nicht auf den gegebenen Objekten liegt) werden aus Geraden Kreise. Also genügt es nur die folgende Aufgabe zu betrachten: Einen Kreis zu konstruieren, der

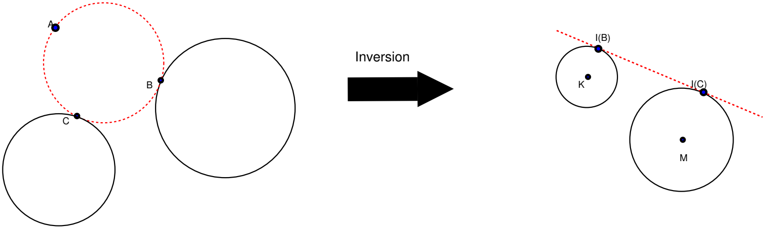
1. drei gegebene Punkte enthält (haben wir schon gemacht)
2. zwei gegebene Punkte enthält und einen gegebenen Kreis berührt
3. einen gegebenen Punkt enthält und zwei gegebene Kreise berührt
4. drei gegebene Kreise berührt

Aufgabe *Gegeben sind zwei Punkte A, B und einen Kreis S. Konstruiere (mit Zirkel/Lineal) den Kreis, der A, B enthält und S berührt*



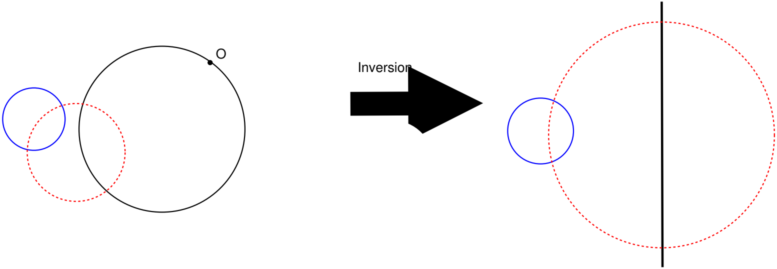
Lösung *Konstruiere den Kreis und den Punkt $I(B)$ nach der Inversion mit Zentrum in A. Bild des Kreises ist dann eine Gerade, die Kreis berühret. Finde den Berührungspunkt. Inversion davon ist der Punkt C.*

Aufgabe *Gegeben sind einen Punkte A und zwei Kreise S_1, S_2. Konstruiere (mit Zirkel/Lineal) den Kreis, der A enthält und S_1, S_2 berührt*



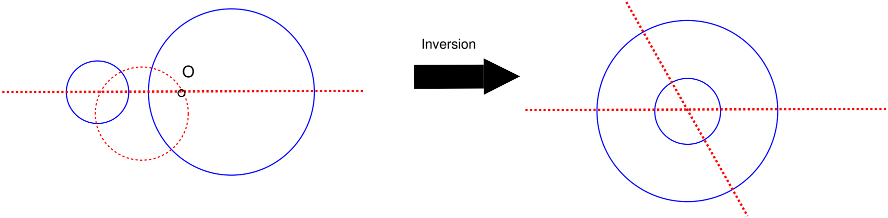
Lösung *Konstruiere das Bild von Kreisen S_1, S_2 nach der Inversion mit Center in A. Bild des Kreises ist dann eine Gerade, die Kreis berühret. Finde den Berührungspunkte. Inversion davon ist der Punkt B, C.*
Bemerkung: *Die konstruktion ist nicht immer möglich*

HilfsAufgabe *Gegeben sind zwei Kreisen. Man konstruiere den Kreis, der beide Kreise orthogonal schneidet.*



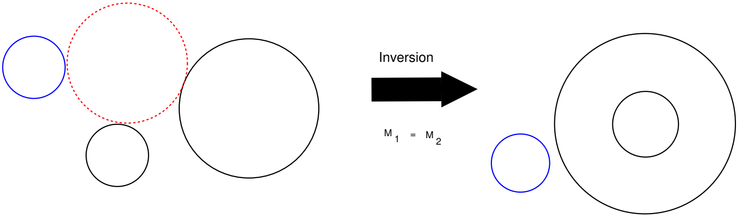
Nach Inversion mit Center in O wird der schwarzen Kreis auf dem Bild eine Gerade. Den Kreis, den wir konstruieren soll, wird dann ein Kreis, der zu dieser Geraden orthogonal ist (also, Mittelpunkt des Kreises auf der schwarzen Geraden liegt), und der zum Bild des blauen Kreises (ist ebenfalls blau auf dem Bild rechts) orthogonal ist. Es ist einfach, so einen Kreis zu konstruieren, weil Mittelpunkt davon ist Lotpunkt des Mittelpunkt des blauen Kreises die zur Geraden und zum Kreis orthogonal ist. Inversion davon ist der gesuchte Kreis.

HilfsAufgabe *Gegeben sind zwei Kreisen. Konstruieren den Center der Inversion, die die Kreise in konzentrische Kreise überführt. (Existenz: Hausaufgabe 3 Blatt 8)*



Konstruktion. Man konstruiere den Kreis, der zu beiden Kreisen orthogonal ist (HA), und die Geraden durch Mittelpunkte. Sei O der Schnittpunkt. Die Inversion mit Center in O führt Kreise in konzentrische Kreise über, weil sie zu beiden Geraden orthogonal sind.

Aufgabe *Gegeben sind drei Kreise* S_1, S_2, S_3. *Konstruiere (mit Zirkel/Lineal) den Kreis, der alle Kreisen* S_1, S_2, S_3 *berührt*



Lösung *Finde eine Inversion, die Kreisen* S_1, S_2 *in konzentrierte Kreisen überführt (HA) . Das Bild von* S_3 *ist ein Kreis. Sei* M *der Mittelpunkt vom Bild des gesuchten Kreises. Dessen Radius ist*
$\frac{1}{2}\left(Radius(Bild_I(S_1)) + Radius(\ Bild_I(S_2))\right)$. *Im Dreieck* MM_2M_3 *kennen wir alle Seiten:*
$|MM_3| = Radius(Bild_I(S)) + Radius(Bild_I(S_3))$;
$|MM_2| = Radius(Bild_I(S)) + Radius(Bild_I(S_1))$
M_2, M_3 sind schon konstruiert. Dann können wir das Bild von gesuchten Kreises konstruieren. Inversion davon ist der gesuchte Kreis
Bemerkung: *Die Konstruktion ist nicht immer möglich; manchmal sind mehrere Lösungen möglich*