Warum konnten wir Inversionen so erfolgreich beim Lösen von schulgeometrischen Aufgaben anwenden?

Weil bei einigen Aufgaben die Problemstellung einfacher wird, wenn wir Inversionen anwenden, die Aufgabenstellung bleibt aber dieselbe oder wird ‘kontrolliert’ geändert.
Z.B. statt dem Schnittpunkt zweier Kreise muss man den Schnittpunkt einer Geraden (= Bild eines der zwei Kreise nach der Inversion) und eines Kreises (=Bild von dem zweiten Kreis nach der Inversion) finden, was eventuell einfacher ist.

Bei welchen Aufgaben kann man Inversionen effektiv einsetzen?

Wenn in der Aufgabe Eigenschaften gegeben/nachzuweisen sind, die bei einer Inversion nicht verändert werden oder sich kontrolliert verändern. Dazu gehören:

- Aufgaben, wo Kreise/Geraden vorkommen (weil Inversion eine kreistreue Abbildung ist).
- Aufgaben, in welchen Inzidenzeigenschaften (d.h., welche Punkte auf welchen Objekten liegen) gegeben und gefragt sind (weil Inversion eine Bijektion ist).
- Aufgaben, in welchen Winkel vorkommen (weil Inversion eine winkeltreue Abbildung ist).

Noch zwei Beispiele von Transformationen der Ebene, die die Aufgabenstellung nicht verändern und die Aufgabe einfacher machen:

- affine Transformationen (Affinitäten) und
- projektive Transformationen.

Affinität: Wiederholung.

Eine affine Transformation ist eine Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ der Form

$$F(x) = Ax + v,$$

wobei $A \in Mat(2,2)$ und $v \in \mathbb{R}^2$, d.h., eine affine Transformation ist eine Verkettung von Translation $x \mapsto x + v$ und einer linearen Abbildung $x \mapsto Ax$.
Eine affine Transformation heisst eine Affinität, wenn sie bijektiv ist; und sie ist bijektiv, wenn A eine nicht-ausgeartete Matrix ist.

Aus LA ist bekannt, dass

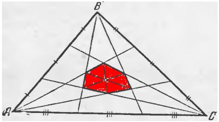
1. Bilder von drei Punkten, die nicht auf einer Geraden liegen, die affine Abbildung eindeutig bestimmen.
2. eine affine Abbildung eine Affinität ist, wenn sie drei Punkte, welche nicht auf einer Geraden liegen, auf drei Punkte, welche nicht auf einer Geraden liegen, überführt. Also kann man mit Hilfe einer geeigneten Affinität ein beliebiges Dreieck in ein beliebiges anderes Dreieck überführen.
3. eine Affinität drei Punkte, welche nicht auf einer Geraden liegen, auf drei Punkte, welche nicht auf einer Geraden liegen, überführt.
4. Affinitäten Geraden auf Geraden und Strecken auf Strecken abbilden. Affinitäten erhalten Parallelität: wenn z.B. eine Gerade zu einer Strecke parallel ist, dann ist auch das Bild der Strecke zum Bild der Geraden parallel.
5. Affinitäten erhalten Teilverhältnisse: Wenn drei Punkte A, B, C auf einer Geraden liegen und $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, dann gilt:

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{F(A)F(C)}}{\overrightarrow{F(A)F(B)}}.$$

Anwendung in der (Schul)geometrie

Wir sagen, dass eine geometrische Aufgabe affin ist, falls die Eigenschaften, die in der Aufgabe als Voraussetzungen gegeben sind, und die Eigenschaften, die gefragt sind, sich nicht ändern wenn wir eine Affinität anwenden.
Um eine affine Aufgabe zu lösen, können Sie zuerst eine passende Affinität anwenden. Wenn Sie dies klug genug tun, vereinfacht dies die Aufgabe.

Bsp.
Im Dreieck (A, B, C) teilen wir jede Seite in 3 gleiche Teile und betrachten das 6-Eck wie auf dem Bild.
Zu zeigen: die Diagonalen des 6-Ecks haben einen Schnittpunkt.



Lösung. Wir betrachten die Affinität F, die Ecken A, B, C des Dreiecks in Ecken eines regulären (alle Winkel sind kongruent, alle Seiten sind kongruent) Dreiecks überführt. Eine solche Abbildung existiert.
Da eine affine Abbildung das Teilverhältnis erhält, teilen die Bilder der Punkte, die Seiten in drei gleiche Teile teilen, auch die Seiten des regelmäßigen Dreiecks in drei gleiche Teile. In dem regelmäßigen Dreieck ist „das rote“ 6-Eck ein 6-Eck deren Diagonalen die Seitenhalbierenden des Dreiecks sind; deswegen haben alle drei Diagonalen einen Schnittpunkt. Da die Affinität die Diagonalen auf Diagonalen überführt, ist das Urbild des Schnittpunkts der Diagonalen in dem neuen Dreieck der Schnittpunkt der Diagonalen im alten Dreieck.