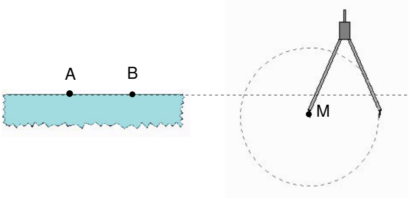
Neues Thema: Konstruktionen mit Zirkel und Lineal:

Frage: (Euklid) Welche geometrischen Objekten sind allein mit Zirkel und Lineal konstruierbar?

Regeln : Was können wir tun:

Sind zwei verschiedene Punkte A, B gegeben, können wir die (perfekte unendliche) Gerade durch sie zeichnen.

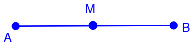
Sind drei Punkte $A \neq B,\ M$ gegeben, können wir einen Kreis mit Radius $|AB|$ um M zeichnen.



Wenn die Schnittpunkte von zwei Geraden, Geraden und einem Kreis oder zweier Kreise existieren und die Anzahl davon endlich ist, können wir einen Schnittpunkt (oder mehrere Schnittpunkte) wählen. Auch wenn auf dem Blatt irgendein Objekt vor der Konstruktion vorhanden ist, können wir die Schnittpunkte der von uns konstruierten Geraden oder Kreise mit dem Objekt bestimmen.

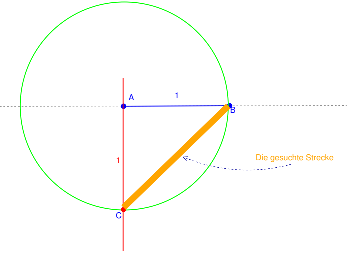
Konstruierbare Zahlen

Def. *Die Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt* *konstruierbar**, wenn bei gegebener Strecke der Länge 1 eine Strecke der Länge $|a|$ konstruierbar ist.*
Das bedeutet: Als vorgegebenes Objekt auf dem Blatt ist eine Strecke gegeben (also, zwei Endpunkte), deren Länge wir nach Definition gleich 1 setzen. Um eine (positive) Zahl a zu konstruieren, müssen wir mit Zirkel und Lineal und unter Verwendung von den oben erklärten Regeln, eine Konstruktion einer Strecke der Länge $|a|$ beschreiben.
Bsp. Die Zahl $\frac{1}{2}$ ist konstruierbar.

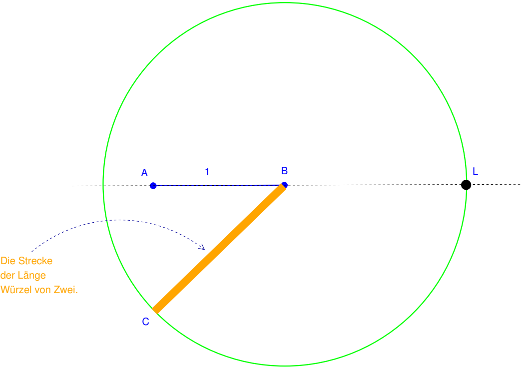


Lösung: man finde den Mittelpunkt M der Strecke (wie oben beschrieben).
Die Strecke AM hat dann die Länge 1/2. Also, wir können (mit Zirkel-Lineal) eine Strecke der Länge 1/2 konstruieren, wenn eine Strecke der Länge 1 vorgegeben ist.

Bsp. Die Zahl $\sqrt{2}+1$ ist konstruierbar



Zuerst konstruieren wir die Strecke der Länge $\sqrt{2}$. Dazu konstruiere man die Gerade durch A, die zu AB orthogonal ist (wie oben beschrieben). Mit Hilfe des Zeichnens eines Kreises vom Radius 1 findet man einen Punkt C auf der Geraden sodass $|AC| = 1$. Dann hat die Strecke CB die Länge $\sqrt{2}$.



Dann „addieren“ wir 1 und $\sqrt{2}$: Wir zeichnen einen Kreis um B vom Radius $|BC| = \sqrt{2}$. Einer von den Schnittpunkten L des Kreises mit der Geraden AB hat den Abstand $1+\sqrt{2}$ von A. Also hat die Strecke AL die gesuchte Länge $1+\sqrt{2}$.

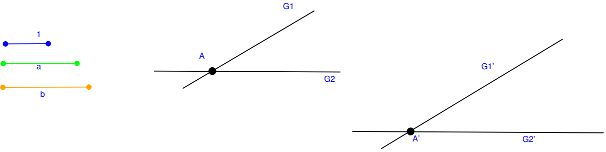
Satz K1. *Sind die Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ konstruierbar, so auch die Zahlen* $\underbrace{a+b, a-b, ab, a/b}_{\textit{Körperoperationen}}$ *(falls $b \neq 0$), und $\sqrt{a}$ (falls $a > 0$).*

Beweis. Seien Strecken der Längen $1, a, b$ gegeben. Die Konstruktion von Strecken der Längen $a+b$ und $a-b$ (falls $a > b$) ist wie im Bsp. mit $1+\sqrt{2}$ oben und ist trivial. Die Konstruktion von Strecken der Längen a/b und ab läßt sich an den folgenden ähnlichen Dreiecken ablesen: (auf nächste Folie werden wir die Konstruktion der Strecke der Länge a/b ausführlicher angeben)

Solch ein ähnliches Dreieck ist konstruierbar, weil eine Gerade durch einen gegebenen Punkt, die zu einer gegebenen Geraden parallel ist, konstruierbar ist.

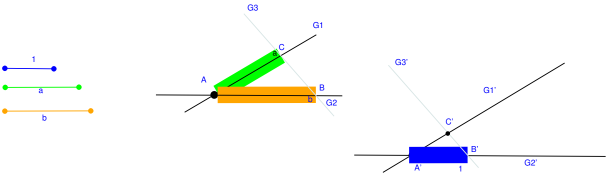
Konstruktion von a/b

Gegeben sind drei Strecken der Längen 1, a und b. Wir müssen die Strecke der Länge a/b konstruieren.



Wir wählen einen Punkt A und konstruieren zwei Geraden, G_1 und G_2 durch A. Dann wählen wir einen anderen Punkt A' und konstruieren zwei Geraden G_1' und G_2' durch A' sodass $G_1 \parallel G_1'$ und $G_2 \parallel G_2'$ ist. Die Konstruktion von solchen Geraden haben wir oben besprochen.

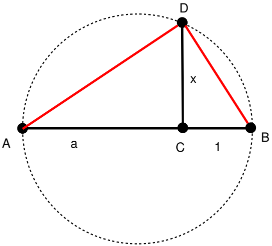
Durch Zeichnen von Kreisen tragen wir die Strecken der Längen 1, a, und b von Punkten A und A' wie auf dem Bild ab.



Die Endpunkte der Strecken bezeichnen wir mit B,B', C wie auf dem Bild.
Dann zeichnen wir die Gerade G_3 durch B und C, und die Gerade G_3', die durch den Punkt B' geht, und parallel zu G_3 ist.
Den Schnittpunkt von G_1' und G_3' bezeichnen wir mit C'. Die Länge von $A'C'$ ist a/b wie wir wollen, weil die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ ähnlich sind, und deswegen $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|A'B'|}{|A'C'|}$, also $\frac{b}{a} = \frac{1}{|A'C'|}$, also $|A'C'| = \frac{a}{b}$ gilt, wie wir wollen.

Konstruktion von $\sqrt{a}$

Konstruiere die Strecke AB der Länge $a+1$.
Konstruiere den Kreis vom Radius $(a+1)/2$ um den Mittelpunkt der Strecke.
Konstruiere die Gerade durch C, die orthogonal zu AB ist. Sei B ein Schnittpunkt der Geraden mit dem Kreis
Die Länge von CD ist $\sqrt{a}$. Tatsächlich ist der Winkel ADB gleich $\frac{\pi}{2}$.



Nach Pythagoras ist

$$\begin{array}{ccccc} |AD|^2 & + & |BD|^2 & = & |AB|^2 \\ x^2 + a^2 & + & x^2 + 1 & = & (a+1)^2. \end{array}$$

Dann $x^2 = a$, also $x = \sqrt{a}$ $\square$

Def. *Wir sagen, dass eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ in der iterierten quadratischen Erweiterung (von $\mathbb{Q}$) liegt, wenn man diese Zahl aus 1 bekommen kann mit den arithmetischen Operatione "$+$", "$-$", $\cdot$, ":" sowie mir der Wurzelziehen bekommen kann.*

(z.B. liegt die Zahl $\frac{(\sqrt{4}+\sqrt{13+\sqrt{23+\sqrt{33}}})}{7+\frac{1}{5}\sqrt{171}}$ in einer iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$).

Folgerung aus Satz K1. *Jede Zahl aus der iterierten quadratischen Erweiterung (von $\mathbb{Q}$) ist konstruierbar.*

Bemerkung. *Beweis vom Satz K1 war konstruktiv: wir wissen nicht nur gezeigt, dass jede Zahl aus der iterierten quadratischen Erweiterung konstruierbar ist, sondern auch wie man diese Zahl konstruier.*

Bemerkung. *Später zeigen wir, dass jede konstruierbare Zahle in der iterierten quadratischen Erweiterung* (von $\mathbb{Q}$) liegt.

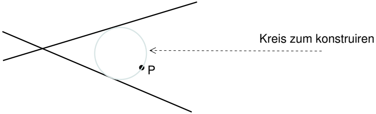
Satz K1 ist eine gewaltige Konstruktionsmethode!

Um eine schwierige Konstruktionsaufgabe zu lösen, können wir wie folgt fortfahren:

- Wir setzen eine gegebene Strecke gleich 1 und
- reduzieren (mit Hilfe von Algebra) die Aufgabe zur Konstruktion einer Strecke der Länge aus einer iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$.
- Dann konstruieren wir diese Strecke wie im Beweis von Satz K1; damit lösen wir die Aufgabe.

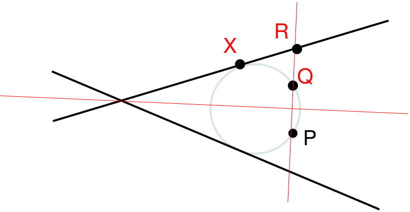
Bsp.

(Ein von Problemen von Appolonius) Gegeben sind zwei nichtparallele Geraden und ein Punkt. Man muss einen Kreis konstruieren, der die beiden Geraden berührt und den Punkt enthält.



Die Aufgabe ist nicht besonders einfach; es gibt zwar elegantere Lösungsmethode (z.B. mit Hilfe der Inversion wie in der Vorlesung 9), nehmen wir zunächst an, dass Sie nicht sofort eine Lösung gefunden haben. Wie kann man weiter agieren?

Die Aufgabe algebraisch analysieren und Satz K1 anwenden:



Um Kreis zu konstruieren, brauchen wir drei Punkte des Kreises zu konstrueiren. Wir betrachten die Winkelhalbierende und die Gerade, die zur Winkelhalbierenden orthogonal ist, und den Punkt P enthält. Die beiden Geraden sind mit Zirkel-Lineal konstruierbar. Dann finden wir den Punkt Q, so dass er die Spiegelung des Punktes P bzgl. der Winkelhalbierenden ist.

Der Punkt Q ist auch mit Zirkel-Lineal konstruierbar und liegt automatisch auf dem gesuchten Kreis. Ausserdem konstruieren wir den Punkt R wie auf dem Bild. Jetzt stellen wir eine Gleichung für die Länge der Strecke RX auf: Nach Sekantensatz haben wir: $|XR|^2 = |RQ| \cdot |RP|$.
Dann gilt $|XR| = \sqrt{|RQ| \cdot |RP|}$.
Die zwei Stecken unter der Wurzel können wir mit Zirkel-Lineal konstruieren. Dann können wir auch die Strecke der Länge $|XR|$ konstruieren, wie wir das im Beweis von Satz K1 gemacht haben (als Strecke der Länge 1 können wir eine beliebige Strecke wählen).
Wenn die Strecke der Länge $|XR|$ konstruiert ist, können wir selbstverständlich den Punkt X finden. Dann ist es einfach, den Mittelpunkt des Kreises zu konstruieren.