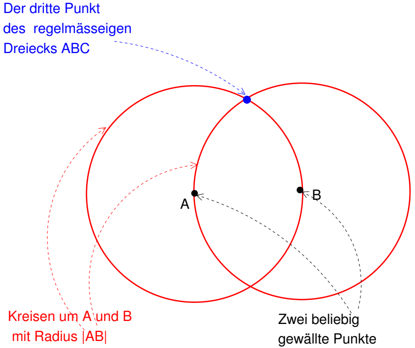
Konstruktionen von regulären n-Ecken

(Reguläres = alle Seiten und alle Winkel sind gleich)

Frage Welche regulären n-Ecken kann man mit Zirkel und Lineal konstruieren?

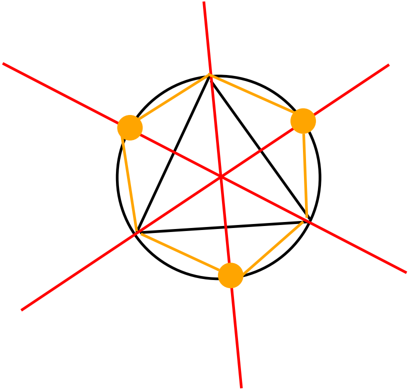
(Falls wir ein reguläres n-Eck konstruieren können, dann können wir ein reguläres n-Eck mit einer vorgegebenen Seite konstruieren, mit Hilfe von Konstruktion von parallelen Geraden)

Bsp. Reguläres Dreieck, reguläres Viereck sind konstruierbar (trivial); reguläres 5-Eck ist konstruierbar (wir zeigen es später mit Methoden aus Satz 1; Sie können aber auch eine „elementare“ Konstruktion über Google finden).



Zuerst die Aufgabe zu wesentlichem reduzieren

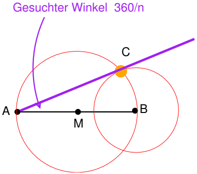
Bsp. Ist ein reguläres n-Eck konstruierbar, so ist auch ein reguläres $2n$-Eck konstruierbar.



Begründung. Wir konstruieren zuerst einen Kreis um das reguläre n-Eck (auf dem Bild $n = 3$). Dann betrachten wir die Mittelsenkrechten zu den Seiten des n-Ecks und deren Schnittpunkte mit dem Kreis. Sie geben uns die fehlende n Ecken des $2n$-Ecks.

Satz K2 *Ein reguläres n-Eck ist g.d. konstruierbar, wenn die Zahl* $\cos(\frac{2\pi}{n})$ *konstruierbar ist.*

Beweis. „$\Leftarrow$“ Angenommen es ist die Zahl $\cos(\frac{2\pi}{n})$ konstruierbar. Dann können wir den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ konstruieren, siehe das Bild:



Der Punkt C ist der Schnittpunkt des Kreises um Mittelpukt der Strecke AB der Länge 1 mit Radius 1/2 und des Kreises um B von Radius cos(360/n). Der Winkel CAB ist hat cos = cos(360/n), weil Winkel BCA Rechtwinkel nach Satz von Thales ist. und die Länge von AB gleich 1 ist

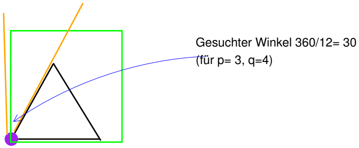
(**Bemerkung: Auf dem Bild ist falscher Winkel eingezeichnet**) Dann können wir einen Kreis in n gleiche Sektoren teilen, und so die Ecken eines reguläres $n-$Eck konstruieren.

Beweis „$\Rightarrow$“

Angenommen reguläres n-Eck ist konstruierbar. Dann können wir das $n-$Eck in einen Kreis einbeschreiben. (Für je zwei Seiten nehme die Geraden, die die Seiten orthogonal im Mittelpunkt schneiden. Deren Durschnitt ist der Mittelpunkt des Kreises)

Dann können wir den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ konstruieren, und deswegen die Zahl $\cos(\frac{2\pi}{n})$. $\square$

Satz K3. *Angenommen $n = q \cdot p$, wobei $ggT(q, p) = 1$, $p \geq 3$, $q \geq 3$. Dann gilt: Ein reguläres $n-$Eck ist g.d. konstruierbar, wenn die regulären $q-$ und $p-$Ecken konstruierbar sind.*
Beweis. „$\Rightarrow$“ ist trivial: falls wir den Winkel $\frac{2\pi}{pq}$ konstruieren können, können wir auch den Winkel $\frac{2\pi}{p}$ bzw. $\frac{2\pi}{q}$ konstruieren.



Beweis „$\Leftarrow$“: Sind die regulären $q-$ und $p-$Ecken konstruierbar, so sind die Winkel $\frac{2\pi}{p}$ bzw. $\frac{2\pi}{q}$ konstruierbar. Dann ist für alle m_1, $m_2 \in \mathbb{Z}$ der Winkel $m_1 \frac{2\pi}{p} + m_2 \frac{2\pi}{q}$ konstruierbar. Es ist aber bekannt, dass es m_1, m_2 gibt s.d. $m_1 p + m_2 q = 1$. Wir multiplizieren diese Gleichung mit $\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{pq}$ und bekommen, dass der Winkel $m_1 \frac{2\pi}{q} + m_2 \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{n}$ konstruierbar ist. Also ist das $n-$Eck konstruierbar. $\square$

Fazit: *Wir sollen nur Konstruierbarkeit von regulären p^k-Ecken untersuchen, wobei p eine Primzahl ist.*
Bemerkung: *Reguläre 2^k-Ecke sind konstruierbar.*

Zusammenfassung und Satz von Gauss

Satz K4 (Gauss 1796, Wantzel 1830) *Ein reguläres n-Eck* ($n \in \mathbb{N}, n \geq 3$) *ist genau dann konstruierbar, wenn die ungeraden Primfaktoren von n verschiedene Primzahlen der Form* $2^{2^k} + 1$ *mit* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *sind.*

Folgerung *Reguläres* 5*-Eck und reguläres* 17*-Eck sind konstruierbar*

(Weil $5 = 2^2 + 1$, $17 = 2^{2^2} + 1$)

(Wir werden Satz 4 nur für 5-Eck (konstruierbar) und 7- und 9-Eck (nichtkonstruierbar) beweisen)

Konstruktion von reguläres n-Ecken und komplexe Zahlen.

Beobachtung $z := e^{\frac{2\pi}{n} i} \in \mathbb{C}$ *ist die Nullstelle der Gleichung*
$z^{n-1} + z^{n-2} + ... + 1 = 0.$ $\qquad (*)$
Tatsächlich, $1, z, z^2, ..., z^{n-1}$ ist die geometrische Progression, deren Summe $\frac{z^n-1}{z-1} = \frac{\left(e^{\frac{2\pi}{n} i}\right)^n - 1}{e^{\frac{2\pi}{n} i} - 1} = \frac{\left(e^{2\pi \cdot i}\right) - 1}{e^{\frac{2\pi}{n} i} - 1} = \frac{1-1}{e^{\frac{2\pi}{n} i} - 1} = 0$ ist.

Bsp. 5-Eck ist konstruierbar
Tatsächlich, für $n = 5$ lautet die Gleichung $(*)$
$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$. Wir können diese Gleichung lösen.Wir dividieren durch z^2 und bekommen
$z^2 + \frac{1}{z^2} + 2 + z + \frac{1}{z} - 1 = 0$ Da $(z + \frac{1}{z})^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2$, ist die Gleichung äquivalent zu
$w^2 + w - 1 = 0$, wobei $w = z + \frac{1}{z}$. Dann ist $w = \frac{\pm\sqrt{5}-1}{2}$. Dann ist $z + \frac{1}{z} = \frac{\pm\sqrt{5}-1}{2}$. Das sind quadratische Gleichungen, deren Koeffizienten in iterierten Quadratischen Erweiterung liegen. Dann haben die Nullstellen die Form $z = a + ib$, wobei a in $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ oder in der quadratischen Erweiterung ist. Da nach Beobachtung oben $z = e^{\frac{2\pi}{5} i} = \cos(\frac{2\pi}{5}) + i\sin(\frac{2\pi}{5})$ eine Nullstelle ist, ist $\cos(\frac{2\pi}{5})$ konstruierbar und deswegen ist ein reguläres $5-$Eck konstruierbar.