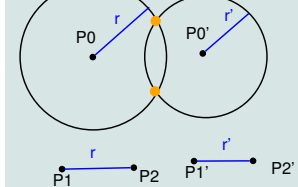
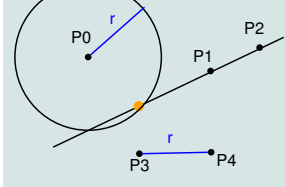
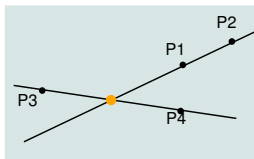


Satz K5. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist genau dann konstruierbar, wenn a in einer iterierten quadratischen Erweiterung von \mathbb{Q} enthalten ist.

Beweis: „ \Leftarrow “ ist Folgerung aus Satz K1. Wir beweisen „ \Rightarrow “. Wir werden die Grundkonstruktionsschritte in Koordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ nachvollziehen. Es genügt zu zeigen: Sind p_1, \dots, p_n Punkte, deren Koordinaten in IQE von \mathbb{Q} liegen, und ist der Punkt p aus p_1, \dots, p_n konstruierbar mit Grundkonstruktionen, so liegen die Koordinaten von p auch in IQE von \mathbb{Q} .

Tatsächlich sind oBdA $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die Eckpunkte der gegebenen Strecke der Länge 1. Deren Koordinaten liegen also in \mathbb{Q} . Falls die Aussage oben richtig ist, liegen die Koordinaten jedes konstruierbaren Punktes in einer iterierten quadratischen Erweiterung von \mathbb{Q} . Dann ist die Länge jeder konstruierbaren Strecke gleich

$$\sqrt{\underbrace{(x_1 - x_2)^2}_{\text{in einer iter. quadr. Erweiterung von } \mathbb{Q}} + \underbrace{(y_1 - y_2)^2}_{\text{in einer iter. quadr. Erweiterung von } \mathbb{Q}}} \in \begin{matrix} \text{iter. quadr.} \\ \text{Erweiterung} \\ \text{von } \mathbb{Q} \end{matrix} .$$



Es genügt nachzuprüfen, dass:

- (i) Schnittpunkt der Geraden $\mathcal{G}_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}, \text{ wobei } t \in \mathbb{R} \right\}$ und $\mathcal{G}_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} x_4 - x_3 \\ y_4 - y_3 \end{pmatrix}, \text{ wobei } s \in \mathbb{R} \right\}$, wobei $x_i, y_i \in \mathbb{K}$, in der iterierten quadratischen Erweiterung liegt. (Die Geraden \mathcal{G}_1 bzw. \mathcal{G}_2 sind die Geraden durch Punkten $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix}$.)
- (ii) Schnittpunkte der Geraden $\mathcal{G}_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}, \text{ wobei } t \in \mathbb{R} \right\}$ und des Kreises um $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, dessen Radius gleich Abstand zwischen $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix}$, wobei $x_i, y_i \in \mathbb{K}$, in einer iterierten quadratischen Erweiterung von \mathbb{K} liegen.
- (iii) Schnittpunkte des Kreises um $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, dessen Radius gleich Abstand zwischen $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ist, mit dem Kreis um $\begin{pmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$, dessen Radius gleich Abstand zwischen $\begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix}$ ist, in einer iterierten quadratischen Erweiterung von \mathbb{K} liegen (wobei $x_i, y_i, y'_i, y'_i \in \mathbb{K}$).

(i)

Falls die Geraden $\mathcal{G}_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}, \text{ wobei } t \in \mathbb{R} \right\}$ und $\mathcal{G}_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} x_4 - x_3 \\ y_4 - y_3 \end{pmatrix}, \text{ wobei } s \in \mathbb{R} \right\}$, nicht parallel sind, ist der Schnittpunkt die Lösungsmenge des Systems (auf s, t)

$$\begin{cases} x_1 + t(x_2 - x_1) = x_3 + s(x_4 - x_3) \\ y_1 + t(y_2 - y_1) = y_3 + s(y_4 - y_3) \end{cases},$$

dessen Matrixform

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & -(x_4 - x_3) \\ y_2 - y_1 & -(y_4 - y_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix} \quad \text{ist}$$

Da die Geraden nichtparallel sind, ist die Koeffizientenmatrix des Systems nichtausgeartet, also ist die Lösung

$$\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & -(x_4 - x_3) \\ y_2 - y_1 & -(y_4 - y_3) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & -(x_4 - x_3) \\ y_2 - y_1 & -(y_4 - y_3) \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -(y_4 - y_3) & (x_4 - x_3) \\ -(y_2 - y_1) & (x_2 - x_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix}$$

Wir sehen, dass die Koordinaten des Schnittpunkts in \mathbb{K} liegen.

(ii)

Man betrachte den Kreis um $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ mit Radius

$r = \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2}$. Da $(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 \in \mathbb{K}$, liegt r in der quadratischen Erweiterung von \mathbb{Q} .

Der Schnittpunkt der Geraden $\mathcal{G} := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}, \text{ wobei } t \in \mathbb{R} \right\}$ mit dem Kreis ist der Punkt der Form $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$, der auf dem Kreis liegt, i.e.

$$(x_0 - x_1 - t(x_2 - x_1))^2 + (y_0 - y_1 - t(y_2 - y_1))^2 = r^2.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung $at^2 + bt + c = 0$ auf t , deren Koeffizienten a, b, c in IQE von Q liegen.

Deren Lösungen sind $t_{\pm} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}$. Sie sind auch konstruierbar.

Die Schnittpunkte der Geraden \mathcal{G}_1 und des Kreises sind die Punkte $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + t_{\pm} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$. Deren Koordinaten liegen dann in IQE von Q .

(iii)

Den Kreis um $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ (bzw. um $\begin{pmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$) dessen Radius gleich dem Abstand r zwischen $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ (bzw. dem Abstand r' zwischen $\begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix}$) ist, ist die Lösungsmenge der Systems

$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0, \\ (x - x'_0)^2 + (y - y'_0)^2 - r'^2 = 0. \end{cases}$$

Subtraktion ergibt

$$2x(x_0 - x'_0) + 2y(y_0 - y'_0) + (r^2 - x_0^2 - y_0^2) - (r'^2 - x_0'^2 - y_0'^2) = 0.$$

Da wir o.B.d.A. $(x_0, y_0) \neq (x'_0, y'_0)$ annehmen können, können wir y durch x (oder x durch y) ausdrücken, dies in eine der Kreisgleichungen einsetzen und dann die entstehende quadratische Gleichung lösen. In jedem Fall sind, um die Koordinaten der konstruierten Punkte aus den Koordinaten der gegebenen Punkte zu berechnen, nur rationale Operationen und das Ziehen einer Quadratwurzel erforderlich. Darum liegen Sie in einer iterierten quadratischen Erweiterung von \mathbb{Q} . □