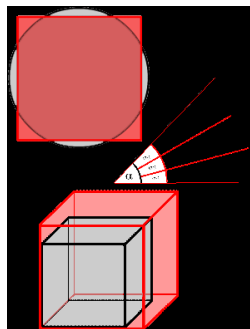


Nichtkonstruierbare Zahlen

Wir werden

1. Unmöglichkeit der Konstruktion von 7–Eck und 9–Eck beweisen
2. Unmöglichkeit von 3 anderen klassischen Konstruktionsproblemen

besprechen:



- ▶ die *Dreiteilung des Winkels* beweisen,
- ▶ die *Verdoppelung des Würfels (Delisches Problem)* beweisen
- ▶ und die *Quadratur des Kreises* (nur) besprechen.

Frage Wie beweist man, dass eine Zahl nicht in der iterierten quadratischen Erweiterung von \mathbb{Q} liegt?

Def. Eine kubische Gleichung $x^3 + \ell x^2 + mx + n = 0$ heißt *irreduzibel*, wenn die Koeffizienten ℓ, m, n rational sind, aber keine Lösung der Gleichung rational ist.

Satz K6 Ist die Zahl x Lösung einer irreduziblen kubischen Gleichung

$$x^3 + \ell x^2 + mx + n = 0, \quad (1)$$

so liegt x nicht in einer iterierten quadratischen Erweiterung von \mathbb{Q} .

Ohne Beweis wegen Zeitbeschränkung; Beweis ist aber nicht zu kompliziert.

Folgerung *Um zu beweisen, dass eine Zahl nicht konstruierbar ist, können wir zeigen, dass die Zahl eine Nullstelle einer irreduziblen kubischen Gleichung ist.*

Satz K7 Sei $x^3 + \ell x^2 + mx + n = 0$ eine kubische Gleichung s.d. $\ell, m, n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

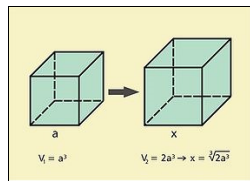
Diese Gleichung ist g.d. irreduzibel, wenn sie keine ganzzahlige Lösung hat.

Beweis. „ \implies “ ist offensichtlich: ist die Gleichung irreduzibel, so sind nach Definition die Lösungen irrational.

Widerspruchsbeweis in „ \impliedby “ Angenommen, die Gleichung ist nicht irreduzibel, obwohl keine Lösung ganzzahlig ist. Dann gibt es eine rationale Lösung $x = r/s$, wobei $r, s \in \mathbb{Z}$. OBdA ist $\text{ggT}(r, s) = 1$. Einsetzen in die Gleichung ergibt $r^3 = -s(lr^2 + smr + ns^2)$. Ist $|s| > 1$, so hat s einen Primfaktor p . Dieser muss auch Primfaktor von r^3 sein, und damit von r , ein Widerspruch. Also ist $s = 1$ und daher x ganzzahlige Lösung, im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Verdoppelung des Würfels (Delisches Problem)

(Konstruktion eines Würfels mit dem doppelten Volumen eines vorgegebenen Würfels)



Gezeichnet von Gericke Helmut

Der Sage nach wurde die Stadt Delos einmal von einer Seuche heimgesucht. Die Bewohner befragten ein Orakel und erhielten den Rat, einen ihrer Altäre zu verdoppeln. Plato interpretierte den Orakelspruch so, dass der würfelförmige Altar durch einen Würfel mit doppeltem Volumen ersetzt werden sollte. Er erklärte, Gott wolle die Griechen beschämen, weil sie das Studium der Mathematik vernachlässigt hätten. Daher ist die Verdoppelung des Würfels auch als „Delisches Problem“ bekannt.

Wäre es lösbar, so könnte man aus einer Strecke der Länge 1 eine Strecke der Länge $\sqrt[3]{2}$ konstruieren. Nach Satz K1 liegt dann $\sqrt[3]{2}$ in einer iterierten quadratischen Erweiterung von \mathbb{Q} . Da $\sqrt[3]{2}$ eine Lösung der kubischen Gleichung

$$x^3 - 2 = 0$$

und diese nach Satz K7 irreduzibel ist, ist das ein Widerspruch zu Satz K6.

Reguläres 7-Eck ist nicht konstruierbar

Nach Satz K5 müssen wir zeigen, dass $\cos(2\pi/7)$ in keiner iterierten quadratischen Erweiterung von \mathbb{Q} liegt. Wir wissen dass $e^{\frac{2\pi}{7}i} = \cos(2\pi/7) + i \sin(2\pi/7)$ eine Lösung der Gleichung $z^6 + z^5 + \dots + 1 = 0$ (1).

Für die Zahl $y := z + \frac{1}{z}$ gilt daher

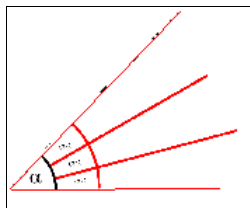
$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0, \quad (2)$$

wie sich sofort durch Einsetzen in (1) und Umformung ergibt. Dann ist

$$y_1 := z_1 + \frac{1}{z_1} = e^{i2\pi/7} + e^{-i2\pi/7} = 2 \cos \frac{2\pi}{7}$$

eine Lösung von (2). Wäre nun das reguläre 7-Eck konstruierbar, so wäre die Zahl $\cos \frac{2\pi}{7}$ konstruierbar. y_1 liegt dann in einer iterierten quadratischen Erweiterung von \mathbb{Q} . Nach Satz K6 folgt daraus, daß die Gleichung (2) nicht irreduzibel ist, sie hat also nach Satz K7 eine ganzzahlige Lösung. Die Lösungen von (2) sind neben $2 \cos \frac{2\pi}{7}$ noch die Zahlen $2 \cos \frac{4\pi}{7}$ und $2 \cos \frac{6\pi}{7}$ (die man genauso findet). Keine davon ist ganzzahlig. Das ist ein Widerspruch.

Dreiteilung des Winkels



Dieses klassische Problem der griechischen Geometrie fragt, ob man einen beliebigen Winkel mit Hilfe von Zirkel und Lineal allein, in drei gleiche Abschnitte teilen kann. Wir werden zeigen, dass diese Aufgabe unlösbar ist (= nicht für alle Winkel lösbar ist). Einige spezielle Winkel lassen sich jedoch sehr wohl in drei gleiche Abschnitte teilen.

- Dreiteilung des 135° -Winkels ist möglich, weil $135 : 3 = 45$ und Winkel 45° konstruierbar ist.
- Dreiteilung des 90° -Winkels ist ebenfalls möglich, weil $90 : 3 = 30$, und Winkel 30° ist konstruierbar mit Hilfe von Winkelhalbierenden des regelmäßigen Dreiecks.
- Dreiteilung des 45° -Winkels ist ebenfalls möglich, weil $45 : 3 = 15$, und Winkel 15° ist konstruierbar mit Hilfe von Winkelhalbierenden des Winkels 30° .

Problem: *Kann man einen beliebigen gegebenen Winkel mit Zirkel und Lineal dreiteilen?*

Antwort: Nein.

Wäre die Winkeldreiteilung mit Zirkel und Lineal lösbar, so wäre insbesondere der Winkel $\pi/9$ konstruierbar, damit wäre $\cos(\pi/9)$ konstruierbar. Wegen der Identität

$$\cos 3\theta = \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta =$$

$$(2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin^2\theta \cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

und wegen $\cos \frac{\pi}{3} = 1/2$ genügt die Zahl $c = 2\cos \frac{\pi}{9}$ der Gleichung

$$c^3 - 3c - 1 = 0.$$

Diese Gleichung hat keine ganzzahligen Lösungen (denn jede Lösung x erfüllt $x(x^2 - 3) = 1$, aber $x = \pm 1$ ist keine Lösung). Nach Satz K7 ist die Gleichung dann irreduzibel, und deswegen ist nach Satz K6 die Zahl $\cos(\pi/9)$ nicht konstruierbar. Die Unlösbarkeit der Winkeldreiteilung ist damit gezeigt. Zugleich ist mit diesem Beweis gezeigt, daß das reguläre 9-Eck nicht konstruierbar ist.

Quadratur des Kreises (ohne Beweis)

Aufgabe: *Mit Lineal und Zirkel aus einem gegebenen Kreis ein Quadrat mit demselben Flächeninhalt zu konstruieren.*

Satz (Lindemann 1882) *Das ist unmöglich*

Beweisidee: Wir müssen zeigen, daß die Zahl π in keiner iterierten quadratischen Erweiterung von \mathbb{Q} liegt. Dies folgt daraus,

- ▶ daß π **transzendent** ist (=Nullstelle von keinem Polynom mit rationalen Koeffizienten),
- ▶ jede konstruierbare Zahl **algebraisch** (=nicht transzendent) ist.

Mit diesem Nachweis wurde das Problem der Quadratur des Kreises endgültig erledigt. Wir werden diese Aussage nicht beweisen.

- ▶ **Hadlock, Charles Robert, Field theory and its classical problems. Carus Mathematical Monographs, 19. Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1978.**
- ▶ **F. Klein. Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie**
- ▶ Bieberbach, Ludwig Theorie der geometrischen Konstruktionen. Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften. Mathematische Reihe, Band 13. Verlag Birkhäuser, Basel, 1952.