Plan

- Punktspiegelung
- Anwendungen bei Lösungen von elementar-geometrischen Aufgaben

Punktspiegelung (Zentralsymmetrie)

Sei $Z \in \mathbb{R}^2$ (oder $\mathbb{R}^n$). Die Punktspiegelung bzgl. Z ist die Abbildung $P_Z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $P_Z(x) = Z + (Z - x) = 2Z - x$ (d.h., der Punkt Z liegt auf der Strecke mit Endpunkten x und $P_Z(x)$ und ist der Mittelpunkt von dieser).

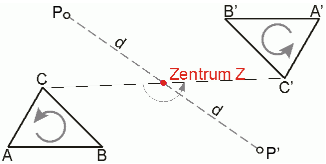


Bild von Wikipedia

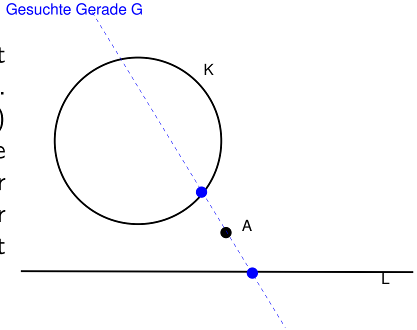
Beobachtung. Punktspiegelung ist eine Isometrie.
Ich gebe zwei Beweise: einer ist linear-algebraisch, in dem anderen benutze ich den SWS-Kongruenzsatz.

Linear-algebraischer Beweis.
Wir betrachten A, B; wir müssen zeigen, dass
$d(A, B) = d(2Z - A, 2Z - B)$. Wir rechnen es aus:
$d(2Z - A, 2Z - B) = |2Z - A - (2Z - B)| = |B - A| = d(A, B)$.

Beweis mit Hilfe von SWS. Wir setzen $A' = P_Z(A)$ und $B' = P_Z(B)$. Dann sind die Winkel $\langle AZB$ und $\langle A'ZB'$ gleich als Gegenwinkel (Beweis, dass Gegenwinkel gleich sind, ist Hausaufgabe). Außerdem sind $|AZ| = |A'Z|$ und $|ZB| = |ZB'|$. Dann existiert nach SWS-Kongruenzsatz eine Isometrie mit $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$ und $Z \mapsto Z'$. Dann ist $|AB| = |A'B'|$.

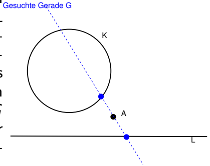
Anwendung von Punktsymmetrien zum Lösen von schwierigen Schulaufgaben

Aufgabe. Gegeben seien ein Punkt A, eine Gerade L und ein Kreis K. Konstruiere (mit Zirkel und Lineal) eine Gerade G, so dass die Strecke mit Endpunkten „Schnittpunkt der Gerade G mit K“, „Schnittpunkt der Gerade G mit L“, A als Mittelpunkt hat.

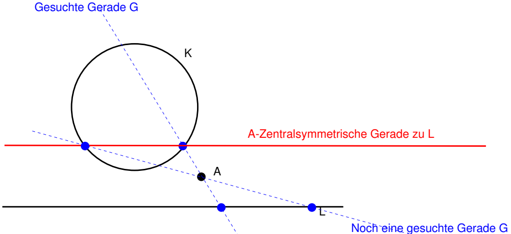


Lösung

Aufgabe. Gegeben seien ein Punkt A, eine Gerade L und ein Kreis K. Konstruiere (mit Zirkel und Lineal) eine Gerade G, so dass die Strecke mit Endpunkten „Schnittpunkt der Gerade G mit K“, „Schnittpunkt der Gerade G mit L“, A als Mittelpunkt hat.



Man konstruiere eine Gerade, die zu L punktsymmetrisch bzgl. A ist (man nehme zwei Punkte von L, konstruiere davon die Punktspiegelung bzgl. A mit Zirkel/Lineal, und ziehe die Gerade durch diese Punkte.) Für jeden Schnittpunkt dieser Gerade mit dem Kreis ist die Gerade durch den Punkt und A die gesuchte Gerade G (also gibt es zwei Lösungen, eine Lösung oder keine Lösungen.)



Verkettung von Punktspiegelungen.

Lemma 12. *Die Verkettung von 2 Punktspiegelungen (bzg. möglicherweise verschiedenen Punkten) ist eine Translation. Die Verkettung von Punktspiegelung und Translation und von Translation und Punktspiegelung ist eine Puntkspiegelung.*

Beweis. Zuerst rechnen wir aus, welche Isometrie wir bekommen wenn wir $I(x) = Ox + b$ und $I'(x) = O'x + b'$ verketten:

$$I \circ I'(x) = O(O'x + b') + b = \underbrace{OO'}_{\tilde{O} \in O_2} x + \underbrace{Ob' + b}_{\tilde{b}}.$$

Wir sehen, dass die zur Verkettung von Isometrien gehörige Matrix das Produkt der zu den Isometrien gehörigen Matrizen ist.

Die Darstellung einer A-Punktspiegelung in der Form $Ox + b$ haben wir letztes mal ausgerechnet:

$P_Z(x) = -x + 2Z$
$= \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 2Z.$

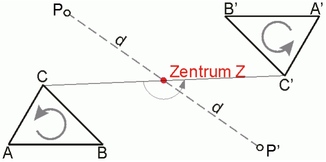


Bild von Wikipedia

Wenn wir zwei Punktspiegelungen verketten, bekommen wir eine Isometrie mit der zugehörigen Matrix $\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$; dann ist die Verkettung von zwei Punktspiegelungen eine Abbildung der Form $x \mapsto Id(x) + v = x + v$, d.h., eine Parallelverschiebung.

$$I \circ I'(x) = O(O'x + b') + b = \underbrace{OO'}_{\tilde{O} \in O_2} x + \underbrace{Ob' + b}_{\tilde{b}}.$$

Wir sehen, dass die zur Verkettung von Isometrien gehörige Matrix das Produkt der zu den Isometrien gehörigen Matrizen ist.

Wenn wir eine Punktspiegelung und eine Translation oder eine Translation und eine Punktspiegelung verketten, bekommen wir eine Isometrie mit der Matrix $O = Id \cdot (-Id) = -Id$ oder $O = (-Id) \cdot Id = -Id$; also ist die Verkettung von Punktspiegelung und Translation eine Abbildung der Form $x \mapsto -x + v$ ist, und das ist eine Punktspiegelung bzgl. $Z = \frac{1}{2}v$.

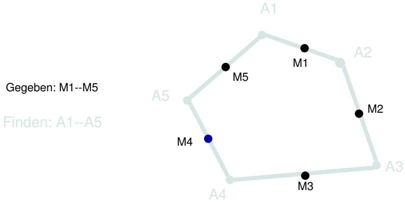
Wichtige Formel aus der vorherigen Folien

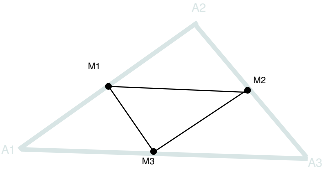
Für $I(x) = Ox + b$ und $I'(x) = O'x + b'$, ist die Matrix von $I \circ I'$ gleich OO':

(Die zur Verkettung von Isometrien gehörige Matrix das Produkt der zu den Isometrien gehörigen Matrizen ist)

Anwendung in einer schulgeometrischen Aufgabe

Gegeben sind die Punkte $M_1, \ldots, M_{2n+1} \in \mathbb{R}^2$. Man konstruiere mit Zirkel/Lineal ein (2n+1)-Eck $A_1, \ldots, A_{2n+1}$, s.d. die Mittelpunkte von A_iA_{i+1} die Punkte M_i sind.



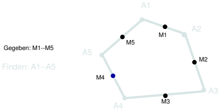


Wenn $n = 1$, also wenn das 2n+1-Eck ein Dreieck ist, ist die Aufgabe leicht: man kann relativ einfach beweisen, dass alle Dreiecke $\Delta_{M_1M_2M_3}$, $\Delta_{M_3A_1M_1}$, $\Delta_{M_2M_1A_2}$, $\Delta_{A_3M_3M_2}$ kongruent sind; dann kann man (wenn $\Delta_{M_1M_2M_3}$ gegeben ist) auch die anderen Konstruieren.

Für das 5-Eck ist die Aufgabe nicht mehr so einfach; probieren Sie zuerst sie selber zu lösen.

Eine Lösung mit Hilfe von (Verkettung von) Punktspiegelungen.

Gegeben sind die Punkte $M_1, \ldots, M_{2n+1} \in \mathbb{R}^2$. Man konstruiere mit Zirkel/Lineal ein (2n+1)-Eck $A_1, \ldots, A_{2n+1}$ s.d. die Mittelpunkte von A_iA_{i+1} die Punkte M_i sind.

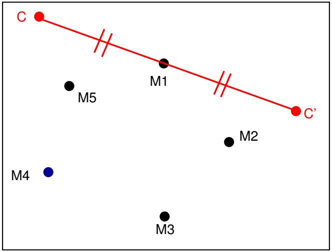


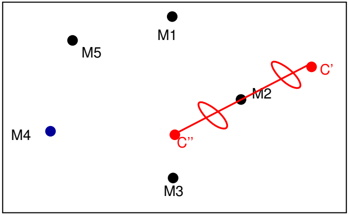
Wir betrachten die Verkettung $P_{M_{2n+1}} \circ \cdots \circ P_{M_1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Das ist eine Punktspiegelung:

$$P_{M_{2n+1}} \circ \cdots \circ P_{M_3} \circ \underbrace{P_{M_2} \circ P_{M_1}}_{\text{Eine Translation } T_v} = P_{M_{2n+1}} \circ \cdots \circ \underbrace{P_{M_3} \circ T_v}_{\text{Punktspiegelung}} = \ldots = \text{Punktspiegelun}$$

Überlegen wir jetzt was diese Punktspiegelung $P_{M_{2n+1}} \circ \cdots \circ P_{M_1}$ mit dem (noch nicht bekannten) Punkt A_1 tut:
$P_{M_1}(A_1) = A_2$, $P_{M_2} \circ P_{M_1}(A_1) = P_{M_2}(A_2) = A_3, \ldots$,
$P_{M_{2n+1}} \circ \cdots \circ P_{M_1}(A_1) = A_1$. Also ist der (gesuchte) Punkt A_1 ein Fixpunkt von $P_{M_{2n+1}} \circ \cdots \circ P_{M_1}$. Da $P_{M_{2n+1}} \circ \cdots \circ P_{M_1}$ eine Punktspiegelung P_Z ist, hat sie genau einen Fixpunkt, und zwar den Punkt Z (wenn $-x + 2Z = x$ ist, ist $x = Z$.) Wie findet man diesen Fixpunkt mit Zirkel/Lineal?

Man nehme einen beliebigen Punkte C und konstruiere davon die P_{M_1}–Spiegelung (C') mit Zirkel/Lineal.





Dann konstruiere man die P_{M_2}–Spiegelung von (C'), (bezeichnet mit C''); $C'' = P_{M_2} \circ P_{M_1}(C)$ u.s.w. Nach insgesamt $2n + 1$–Schritten bekommen wir den Punkt $P_{M_{2n+1}} \circ \cdots \circ P_{M_1}(C)$

Dann ist der Mittelpunkt der Strecke zwischen C und $P_{M_{2n+1}} \circ \cdots \circ P_{M_1}(C)$ genau der gesuchte Punkt $Z = A_1$.

Nachdem wir A_1 konstruiert haben, ist die Restkonstruktion einfach.

Bemerkung. Ein solches $2n+1$–Eck $A_1 ... A_{2n+1}$ ist eindeutig (bei gegebenen $M_1, ..., M_{2n+1}$). Das $2n+1$–Eck $A_1 ... A_{2n+1}$ existiert immer, wenn wir erlauben, dass die Seiten des $2n+1$-Eckes einander schneiden und nicht konvexe $2n+1$-Ecke als Lösungen annehmen (also, wenn $2n+1$-Eck für uns eine $2n+1$-Folge von Punkten ist).