Moore–Graphen

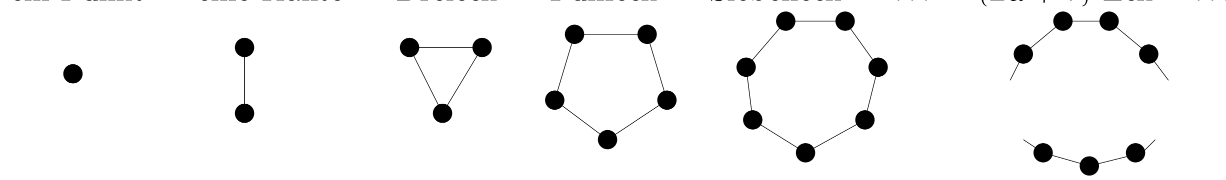
Diesmal soll es um endliche reguläre Graphen gehen. G heißt k-*regulär*, wenn von jeder Ecke genau k Kanten ausgehen. Z.B. ist ein Fünfeck ein 2-regulärer Graph, oder der K_5 ist 5-regulär. Angenommen nun ein k-regulärer Graph hat *Durchmesser* d, d.h. von jeder Ecke komme ich zu jeder anderen über einen Kantenzug der Länge höchstens d. Wieviele Ecken kann solch ein Graph haben? Eine Ecke hat k Nachbarn, jede davon $k-1$ weitere Nachbarn, davon wieder jede $k-1$ weitere Nachbarn usw., bis ich im d-ten Schritt alles abgedeckt habe. Natürlich können dabei Ecken doppelt gezählt sein. Also gibt es höchstens $1 + \sum_{i=1}^{d} k(k-1)^{i-1}$ viele Ecken. Ein Graph heißt nun *Moore–Graph*, oder genauer Moore-(d,k)-Graph, falls er k-regulär vom Durchmesser d ist mit genau

$$n = 1 + \sum_{i=1}^{d} k(k-1)^{i-1} \tag{1}$$

vielen Ecken.

Es gibt ein paar offensichtliche Beispiele:

$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,2)$	$(3,2)$	...	$(d,2)$	...
ein Punkt	eine Kante	Dreieck	Fünfeck	Siebeneck	...	$(2d+1)$-Eck	...



Für $d \geq 3$ gibt es keine anderen Moore–Graphen (für $d = 0$ ist der einpunktige Graph ein Moore–Graph; für $d = 1$ ist jeder vollständige Graph mit k Ecken ein $(1,k)$–Moore-Graph). Für $d = 2$ gibt es aber noch zwei oder drei andere: der Beweis ist eine hübsche Anwendung der linearen Algebra!

Zunächst sollte man bemerken, daß ein Moore-$(2,k)$-Graph dreiecksfrei ist, denn bei der obigen Aufteilung der Ecken in Schichten dürfen keine Ecken doppelt gezählt werden: ein Nachbar eines Nachbars einer Ecke E kann nicht schon ein Nachbar von E sein – das würde der Maximalitätsbedingung widersprechen.

Sei A die Inzidenzmatrix von G, also die $(n \times n)$-Matrix mit Eintrag 1 an der Stelle (i,j), wenn es eine Kante zwischen der i-ten und der j-ten Ecke gibt, 0 sonst (dazu seien die Ecken irgendwie durchnumeriert). A ist eine symmetrische Matrix aus natürlichen Zahlen, insbesondere diagonalisierbar.

Was bedeutet die Matrix A^2? Sie hat ebenfalls nur natürliche Zahlen als Einträge: und zwar kommt an der Stelle (i,j) jedesmal 1 dazu, wenn es ein k gibt, so daß A an den Stellen (i,k) und (k,j) eine 1 enthält, also wenn es einen Kantenzug von der i-ten Ecke über die k-te Ecke zur j-ten Ecke gibt. A^2 zählt also die Wege der Länge 2 zwischen i-ter und j-ter Ecke. (Allgemeiner wird A^m die Wege der Länge m zählen.) Von jeder Ecke zu sich selbst gibt es k Wege der Länge 2: nämlich zu jedem Nachbarn und zurück. Von jeder Ecke gibt es zu jeder andern Ecke einen Weg der Länge 1 oder 2 (wegen Durchmesser 2) und nicht beides gleichzeitig (wegen der Dreiecksfreiheit). Somit gilt:

$$A^2 + A - (k-1)I = J, \tag{2}$$

wobei J die Matrix aus lauter Einsen ist. J hat den Eigenwert n zum Eigenvektor $u = (1,\dots,1)^t$ mit Vielfachtheit 1 und, da Rang 1, den Eigenwert 0 mit Vielfachheit $n-1$.

Nach (2) ist J ein Polynom in A, damit simultan mit A diagonalisierbar. Insbesondere gilt für die Eigenwerte e von A die gleiche polynomiale Beziehung, also daß

$$e^2 + e - (k-1) \tag{3}$$

ein Eigenwert von J ist (mit der entsprechenden Vielfachheit). Wie sehen also die Eigenwerte von A aus? A hat zum einen zu u den Eigenwert k (denn wegen der k-Regularität tauchen in jeder Zeile genau k Einsen auf) mit Vielfachheit 1, und es gilt mit (3) die Formel

$$k^2 + 1 = k^2 + k - (k-1) = n, \tag{4}$$

was nichts weiter als die Formel (1) im Spezialfall $d = 2$. Ferner hat A Eigenwerte e_1 und e_2 mit Vielfachheit m bzw. $n-1-m$, die sich aus (3) berechnen als

$$e_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4k-3}}{2}. \tag{5}$$

Da die Spur die Summe der Eigenwerte ist und A nur Nullen auf der Diagonale hat, folgt

$$0 = \mathrm{Sp}(A) = k + me_1 + (n-1-m)e_2. \tag{6}$$

1. Fall: e_1 ist irrational. (6) ist in diesem Fall nur möglich, wenn $m = n-1-m = \frac{n-1}{2}$, und es folgt dann mit (5) und (4)

$$0 = k + \frac{n-1}{2}(e_1 + e_2) = k - \frac{n-1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}k(k-2). \tag{7}$$

Die Lösungen von (7) sind $k = 0, 2$. Für $k = 0$ gibt es offenbar keinen Moore–Graphen mit Durchmesser 2; für $k = 2$ erhält man das Fünfeck.

2. Fall: e_1 ist rational. Da A ganzzahlig ist, müssen rationale Eigenwerte schon ganzzahlig sein (ein Satz aus der Algebra: wenn ein normiertes Polynom aus $\mathbb{Z}[X]$ – nämlich hier das charakteristische Polynom von A – in $\mathbb{Q}[X]$ zerfällt, dann auch schon in $\mathbb{Z}[X]$). Somit ist

$$4k + 3 = s^2 \tag{8}$$

mit $s \in \mathbb{N}$. Aus (4),(6) und (8) erhält man nun

$$s^5 + s^4 + 6s^3 - 2s^2 + (9 - 32m)s - 15 = 0. \tag{9}$$

Da wir ganzzahlige Lösungen für s suchen, kommen nur die Teiler von 15 in Frage; es ergibt sich als mögliche Lösungen:

	m	k	n
$s=1$	0	1	2
$s=3$	5	3	10
$s=5$	28	7	50
$s=15$	1729	57	3250

Für $k = 1$ gibt es wieder keinen passenden Graphen.

Für $k = 3$ ergibt sich der sogenannte Petersen–Graph; für $k = 7$ der Hoffman–Singleton–Graph. Beide sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Für $k = 57$ ist es ein offenes Problem, ob solch ein Graph existiert, und wenn ja, ob er eindeutig ist.