Wie werden die Vorlesungen/Übungen organisiert?

- Mein Name: Prof. Vladimir Matveev
- Sprechstunden: nach jeder Vorlesung bzw. in der Pause
- Homepage der Vorlesung: `http://users.fmi.uni-jena.de/~matveev/Lehre/LA22/`
- Das ist eine Pflichtveranstaltung,
- die jede Woche aus 2 zwei-stündigen Vorlesungen und einer 2-stündigen Anwesenheitsübung + 2 Stündigen Tutorium (freiwillig, aber nachdrücklich empfohlen) besteht.
- Die erfolgreiche Teilnahme bringt 9 Leistungspunkte
- und die Erlaubnis, an mehreren weiteren Lehrveranstaltungen teilzunehmen.

Was bedeutet „erfolgreiche Teilnahme“?

- Sie müssen an den Übungen regelmäßig und aktiv teilnehmen
  1. Regelmäßig = man darf nicht mehr als zwei mal unbegründet fehlen
- Mind. 60% der Punkte von den Hausaufgaben sammeln
  1. An fast jeden Dienstagsabend oder Mittwochmorgen wird ein Übungsblatt mit in der Regel drei-vier Aufgaben ins Netz gestellt (Moodle). Sie müssen die Aufgabe einzeln lösend und vor der darauffolgenden Dienstag-Vorlesung über Moodle abgeben
  2. Die abgegebenen Lösungen werden individuell korrigiert und bepunktet. Sie müssen mind. 60% der Punkte sammeln.
  3. Sie bekommen noch Bonuspunkte für das Bonus-Blatt (wird als Wiederholungsmöglichkeit angesehen).
  4. Außerdem findet verm. in der ersten Vorlesungswoche von 2023 eine Probe-Klausur statt. Dafür bekommen Sie auch Bonuspunkte (bis zu 20% der Hausaufgabenpunkte).
- Sie müssen die Hauptklausur oder die Wiederholungsklausur bestehen.

Hauptklausur

- Die Anzahl von Hausaufgabenpunkten ist die wichtigste Zulassungsbedienung zur Hauptklausur (bzw. zur Wiederholungsklausur)
- Für die Gesamtnote zählen nur die Punkte der Hauptklausur bzw. der Wiederholungsklausur.
- Klausur besteht (in der Regel) aus 5 Aufgaben.
  - Eine Klausuraufgabe ist, einen Satz aus der Vorlesung zu beweisen. (Sie bekommen eine Liste.)
  - Eine Klausuraufgabe ist eine Verständnisaufgabe (etwa welche von drei Aussagen falsch sind, gegebenenfalls mit Gegenbeispiel, oder eine multiple-choice Aufgabe).
  - Eine Klausuraufgabe ist eine nichtveränderte Beweis-Hausaufgabe.
  - Zwei Klausuraufgaben sind "neue" Aufgaben (die zu Hausaufgaben ähnlich sind). Die Studenten, die die Hausaufgaben gut verstanden haben, bestehen in der Regel Klausur.

Empfehlungen und typische Fehler.

- Ich stelle nach Möglichkeit die Vorlesungen vorher ins Netz. Drucken Sie sie aus. Während der Vorlesungen machen Sie Notizen. Versuchen Sie den Inhalt der Vorlesungen noch am gleichen Tag zu verstehen. (Typischer Fehler: „Ich werde in zwei Wochen mehr Zeit haben.“)
- Probieren Sie, alle Hausaufgaben zu lösen. Falls Sie dies nicht geschafft haben, probieren Sie die Lösungen später zu verstehen. Wenden Sie sich an die Kommilitonen, Mathe-Kaffe-Tutoren und an den Übungsgruppenleiter. (Typischer Fehler: „Ich habe 2 von vier Aufgaben verstanden - das reicht schon“).
- Es ist empfehlenswert, in kleinen Gruppen zu Arbeiten. In dem Fall müssen Sie trotzdem die Aufgaben einzeln abgeben und die Lösungen der abgegebenen Aufgaben vollständig verstehen.

  (Typischer Fehler: Man teilt die Hausaufgaben: ein Student macht 1 und 2, der andere 3 und 4).
- Sie dürfen mich unterbrechen und Fragen stellen.

Verteilung in der Übungsgruppe

Wurde von Friedolin gemacht. Ich hoffe, dass Sie die Information von Friedolin in der welchen Übungsgruppe Sie sind rechtzeitig bekommen haben bzw. bekommen werden.

Tutorium

Im Tutorium werden Lösungen zu den Hausaufgaben präsentiert und Fragen besprochen

Tutorium ist keine Pflichtveranstaltung, aber zu empfehlen.

Tutoriumsleiter (Herr manuel.robert.quaschner@uni-jena.de) ist auch für die Organisation der Übungsgruppen verantwortlich. Bitte mit allen Fragen bezüglich Übungsbetrieb sich an Ihn wenden.

Ziel des Kurses: Einführung in das Gebiet der linearen Algebra mit Anwendungen in der analytischen Geometrie.
Wichtigster Unterschied zur „Schulmathematik“: Beweise

- Sie müssen die Beweise verstehen.
  - Sie müssen selbst Beweisen können
  - und Beweise sauber aufschreiben können.

Die drei wichtigsten Beweismethoden: direkter Beweis, Widerspruchsbeweis (indirekter Beweis), Induktionsbeweis

Direkter Beweis: Die Behauptung wird durch Anwendung von bereits bewiesenen Aussagen und durch logische Folgerungen bewiesen.
Bsp von einem direkten Beweis: zuerst Vorarbeit:
Wir betrachten ein allgemeines lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten:

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

Eine Lösung des Gleichungssystems ist ein geordnetes $n-$Tupel $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$, wobei $\bar{x}_i$ reelle Zahlen sind, s. d. für jede Gleichung $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$ des Gleichungssystems gilt $a_{i1}\bar{x}_1 + \cdots + a_{in}\bar{x}_n = b_i$.

Bsp. $n = m = 2$, $\left\{ \begin{array}{ccc} 2x_1 + 4x_2 & = & 8 \\ 3x_1 - 6x_2 & = & 4 \end{array} \right.$

Dann ist $(\frac{8}{3}, \frac{2}{3})$ eine Lösung: $\left\{ \begin{array}{ccc} 2 \cdot \frac{8}{3} + 4 \cdot \frac{2}{3} & = & 8 \\ 3 \cdot \frac{8}{3} - 6 \cdot \frac{2}{3} & = & 4 \end{array} \right.$

Wir definieren die folgenden elementaren Operationen (elementare Zeilenumformungen) auf linearen Gleichungssystemen:

Typ 1: Seien i, k aus $1, ..., m$, $i \neq k$, $c \neq 0$. Dann

$(S1)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & \vdots & \\ (a_{k1} + c \cdot a_{i1})x_1 & + \cdots + & (a_{kn} + c \cdot a_{in})x_n & = & b_k + c \cdot b_i & \longleftarrow \; k\text{−te Zeile} \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

(Das c-fache der i−ten Gleichung wird zur k−ten addiert.)

Bsp: $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 & = & 8 \\ 3x_1 - 6x_2 & = & 4 \end{cases} \xrightarrow{Z_2 := Z_2 - \frac{3}{2} Z_1} \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 & = & 8 \\ 0x_1 - 12x_2 & = & -8 \end{cases}$

Typ 2: Sei k eine Zahl aus $1, ..., m$ und $c \neq 0$. Dann

$$(S2) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & \vdots & \\ c \cdot a_{k1}x_1 & + \cdots + & c \cdot a_{kn}x_n & = & c \cdot b_k \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Bsp. $k = 2$, $c = -\frac{1}{12}$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 & = & 8 \\ 0 \cdot x_1 - 12x_2 & = & -8 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 & = & 8 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 & = & \frac{2}{3} \end{cases}$$

Typ 3: Seien i, k aus $1, \dots, m$, $i < k$. Dann

$$(S3) \quad \left\{ \begin{array}{cccccl} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 & \\ \vdots & & & \vdots & & \\ a_{k1}x_1 & + \cdots + & a_{kn}x_n & = & b_k & \longleftarrow i\text{−te Zeile} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ a_{i1}x_1 & + \cdots + & a_{in}x_n & = & b_i & \longleftarrow k\text{−te Zeile} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m & \end{array} \right.$$

Satz 1 *Ist* $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ *eine Lösung des Systems* (S), *so ist* $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ *eine Lösung des Systems* $(S1)$, $(S2)$ *und* $(S3)$.

(Direkter) Beweis: 1. Angenommen, $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ ist eine Lösung von (S).
Z.z.: Dann ist $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ auch eine Lösung von $(S1)$.
Wir betrachten die $i-$te und die $k-te$ Gleichungen von (S): wenn wir $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ einsetzen, bekommen wir die Gleichungen, die erfüllt sind.

$a_{i1}\bar{x}_1 + ... + a_{in}\bar{x}_n = b_i$

$a_{k1}\bar{x}_1 + ... + a_{kn}\bar{x}_n = b_k$

Dann ist auch $(a_{k1}\bar{x}_1 + ... + a_{kn}\bar{x}_n) + c\cdot(a_{i1}\bar{x}_1 + ... + a_{in}\bar{x}_n) = b_k + c\cdot b_i$ erfüllt. Nach Umordnen der Terme in der letzten Gleichung sehen wir, dass

$(a_{k1} + c \cdot a_{i1})\bar{x}_1 + ... + (a_{kn} + c \cdot a_{in})\bar{x}_n = b_k + c\cdot b_i$ erfüllt ist, und dies ist $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ eingesetzt in die $k-$te Gleichung von $(S1)$.

Die anderen Gleichungen von $(S1)$ sind auch erfüllt, weil sie mit Gleichungen von (S) zusammenfallen. Also ist $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ eine Lösung des Systems $(S1)$.

2. Angenommen, $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ ist eine Lösung von (S). Z.z.: Dann ist es auch eine Lösung von $(S2)$. Wir betrachten die $k-$te Gleichung von $(S2)$: wenn wir $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ einsetzen, bekommen wir
$(*) \quad c \cdot a_{k1}\bar{x}_1 + \dots + c \cdot a_{kn}\bar{x}_n = c \cdot b_k.$
Wegen des Distributivgesetzes steht links die Zahl
$c \cdot (a_{k1}\bar{x}_1 + \dots + a_{kn}\bar{x}_n)$. Da rechts $c \cdot b_k$ steht und da
$a_{k1}\bar{x}_1 + \dots + a_{kn}\bar{x}_n = b_k$ ist, ist $(*)$ erfüllt. Die anderen Gleichungen von $(S2)$ sind auch erfüllt, weil sie mit Gleichungen von (S) zusammenfallen. Also ist $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ eine Lösung des Systems $(S2)$.

Man könnte mit ähnlichen Methoden (einfach) beweisen, dass jede Lösung $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ von $(S3)$ auch eine Lösung von (S) ist; ich werde aber einen anderen Beweis vorführen. Zuerst ein Witz:

Wie kocht ein Mathematiker Tee (falls leerer Wasserkocher, mehrere Teebeutel, Wasserhahn, Strom usw. vorhanden sind) ?
1. Wasser in Wasserkocher gießen 2. Wasser kochen 3. Teebeutel und kochendes Wasser in die Tasse.

Wie kocht ein Mathematiker Tee (falls Wasserkocher schon mit Wasser gefüllt ist?)
Er führt das neue Problem auf das alte zurück: Zuerst Ausgießen. Dann wie oben.

Warum ist jede Lösung von (S) auch eine Lösung von (S3)

Weil eine Operation vom Typ 3 sich aus Operationen der Typen 1 und 2 zusammensetzen läßt:

$$\left\{\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & \vdots & \\ a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n & = & b_k \\ \vdots & \vdots & \end{array}\right. \xrightarrow{Z_k := Z_k + Z_i} \left\{\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & \vdots & \\ (a_{k1} + a_{i1})x_1 + \cdots + (a_{kn} + a_{in})x_n & = & b_k + b_i \\ \vdots & \vdots & \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{Z_i := Z_i - Z_k} \left\{\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \\ -a_{k1}x_1 + \cdots - a_{kn}x_n & = & -b_k \\ \vdots & \vdots & \\ (a_{k1} + a_{i1})x_1 + \cdots + (a_{kn} + a_{in})x_n & = & b_k + b_i \\ \vdots & \vdots & \end{array}\right. \xrightarrow{Z_k := Z_k + Z_i}$$

$$\left\{\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \\ -a_{k1}x_1 + \cdots - a_{kn}x_n & = & -b_k \\ \vdots & \vdots & \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & \vdots & \end{array}\right. \xrightarrow{Z_i := -1 \cdot Z_i} \left\{\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \\ a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n & = & b_k \\ \vdots & \vdots & \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & \vdots & \end{array}\right. \qquad \square$$

Folgerung 1 *Ist* $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ *eine Lösung eines der Systeme* $(S1)$, $(S2)$ *oder* $(S3)$, *so ist* $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ *auch eine Lösung des Systems* (S) *(und deswegen nach Satz 1 auch der Systeme (S1), (S2), und (S3)).*

Beweis. (S) ensteht aus $(S1)$ durch Operationen vom Typ 1 (mit den selben k und i und $c' = -c$). Deswegen ist nach Satz 1 jede Lösung von $(S1)$ auch eine Lösung von (S).

(S) ensteht aus $(S2)$ durch Operationen vom Typ 2 (mit dem selben k und $c' = \frac{1}{c}$). Deswegen ist nach Satz 1 jede Lösung von $(S2)$ auch eine Lösung von (S).

(S) ensteht aus $(S3)$ durch Operationen vom Typ 3 (mit den selben k und i). Deswegen ist nach Satz 1 jede Lösung von $(S3)$ auch eine Lösung von (S). $\square$

Widerspruchsbeweis

Man zeigt, dass ein Widerspruch entstünde, wenn die zu beweisende Behauptung falsch wäre. Dazu nimmt man an, dass die Behauptung falsch ist und wendet die gleichen Methoden wie beim direkten Beweis an. Wenn daraus ein Widerspruch entsteht, dann kann die Behauptung nicht falsch sein, also muss sie richtig sein

Bsp (Euklid): Es gibt unendlich viel Primzahlen.

Widerspruchsbeweis: Angenommen, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, \cdots, p_n$. Es sei m die kleinste Zahl, die von allen diesen Zahlen geteilt wird. Ist dann $m+1$ eine Primzahl, dann ist sie nach Konstruktion größer als $p_1, \ldots, p_n$ und somit eine weitere Primzahl im Widerspruch zur Annahme.Ansonsten sei q ein Primteiler von $m+1$. Wäre q eine der Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$,so würde q sowohl m als auch $m+1$ teilen. Dann muss q aber auch die Differenz, also 1, teilen, was absurd ist. Also ist q eine weitere Primzahl, was wiederum unserer Annahme widerspricht. Die Annahme, es gäbe nur endlich viele Primzahlen, ist also falsch. $\square$

Vollständige Induktion

Induktion benutzt man oft zum Beweis von Sätzen der Form „Für jede natürliche Zahl n gilt ... „. Dazu zeigt man zuerst, dass (InduktionsAnfang) die Aussage für $n = 1$ (oder auch einen anderen Anfangswert n_0) gilt, und danach,
(InduktionsSchritt) dass sie auch für $n + 1$ gilt, wenn
(InduktionsVoraussetzung) sie für n gilt.

Picture from Wikipedia common

Die vollständige Induktion lässt sich mit einem Domino-Effekt vergleichen.
Man stellt die Steine (= Aussagen) so auf, dass, wenn einer umfällt, auch der nächste umfällt ($n \longrightarrow n + 1$),

und stößt den ersten Stein um ($n = 1$; (InduktionsAnfang))

Def 1. Wir sagen, dass das Gleichungsystem (S) Stufenform hat, wenn für alle $i = 1, \cdots, m-1$ folgendes gilt:

(a) Wenn ein k aus $1, 2, \cdots, n-1$ existiert mit $a_{i1} = a_{i2} = \cdots = a_{ik} = 0$, dann gilt: $a_{i+1\ 1} = a_{i+1\ 2} = \cdots = a_{i+1\ k+1} = 0$

(b) Wenn $a_{i1} = \cdots = a_{in} = 0$, dann $a_{i+1\ 1} = \cdots = a_{i+1\ n} = 0$

(c) Wenn $a_{i1} \neq 0$, dann $a_{i+1\ 1} = 0$.

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \\ & & 8x_2 & + & 5x_3 & = & -1 \\ & & & - & 2x_3 & = & 6 \end{array}\right.}$$

Bsp $\left\{\begin{array}{lll} x_1 & +2x_2 = & 1 \\ & x_2 = & 2 \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{lll} 2x_1 + 3x_2 & -5x_3 & = 4 \\ & x_3 & = 2 \\ & 0 \cdot x_3 & = 1 \end{array}\right.$ sind in Stufenform.

Bsp (1) $\left\{\begin{array}{lll} & x_2 = & 2 \\ x_1 & +2x_2 = & 1 \end{array}\right.$, (2) $\left\{\begin{array}{lll} 2x_1 + 3x_2 & -5x_3 & = 4 \\ & 0 \cdot x_3 & = 0 \\ & x_3 & = 2 \end{array}\right.$, (3) $\left\{\begin{array}{lll} 2x_1 + 3x_2 & -5x_3 & = 4 \\ x_1 + & 0 \cdot x_3 & = 2 \\ & x_3 & = 0 \end{array}\right.$

sind NICHT in Stufenform: In (1) ist (a) für $i = k = 1$ nicht erfüllt, weil $a_{1+1 1} \neq 0$. In (2) ist (b) nicht erfüllt (für $i = 2$). In (3) ist (c) nicht erfüllt (für $i = 1$) .

Satz 2 (Gauss) *Jedes lin. Gleichungssystem läßt sich durch endlich viele elementare Operationen auf Stufenform bringen.*

Satz 2 (Gauss) *Jedes lin. Gleichungssystem läßt sich durch endlich viele elementare Operationen auf Stufenform bringen.*
Induktionsbeweis: Induktion nach m.
(IA) Für $m = 1$ ist die Aussage richtig: Jede lin. Gleichungssystem,das aus $m = 1$ Gleichung besteht, ist in Stufenform.
(IV) Angenommen, die Aussage ist für irgendein m richtig: jedes lin. Gleichungssystem, das aus m Gleichungen besteht, läßt sich durch endlich viele elementaren Operationen auf Stufenform bringen.
(IS) Z.z.: Die Aussage ist auch für $m + 1$ richtig: Jedes lin. Gleichungssystem, das aus $m + 1$ Gleichungen besteht, läßt sich durch endlich viele elementare Operationen auf Stufenform bringen.

Nehmen wir das erste k aus $1, \ldots, n$, s.d. nicht alle Zahlen $a_{1k}, \ldots, a_{m+1k}$ gleich 0 sind (sonst ist das Gleichungsystem bereits in Stufenform).

Bsp: Für $\begin{cases} 0\cdot x_1 & +3x_2 & -5x_3 & =6 \\ 0\cdot x_1 & +0\cdot x_2 & +x_3 & =2 \\ 0\cdot x_1 & +1\cdot x_2 & +0\cdot x_3 & =1 \end{cases}$ ist $k=2$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen,dass $a_{1k} \neq 0$, sonst vertauscht man die Gleichung mit $a_{jk} \neq 0$ mit der ersten Gleichung (Operation von Typ 3).

$$\left\{ \begin{array}{|c|} \hline 0\cdot x_1 + \cdots + 0\cdot x_{k-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ 0\cdot x_1 + \cdots + 0\cdot x_{k-1} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline +a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \hline \text{Irgendwas} \\ \hline \end{array} \right. , \quad a_{1k} \neq 0.$$

Dann addieren wir für jedes j aus $2, \ldots, m+1$ das $-\frac{a_{jk}}{a_{1k}}-$fache der $1-$ten Gleichung zur $j-$ten Gleichung. **Bsp:**

$$\begin{cases} 0\cdot x_1 & +3x_2 & -5x_3 & =6 \\ 0\cdot x_1 & +0\cdot x_2 & +x_3 & =2 \\ 0\cdot x_1 & +1\cdot x_2 & +0\cdot x_3 & =1 \end{cases} \xrightarrow{\substack{Z_2 := Z_2 + 0\cdot Z_1 \\ Z_3 := Z_3 - \frac{1}{3} Z_1}} \begin{cases} 0\cdot x_1 & +3x_2 & -5x_3 & =6 \\ 0\cdot x_1 & +0\cdot x_2 & +x_3 & =2 \\ 0\cdot x_2 & +0\cdot x_2 & +\frac{5}{3}\cdot x_3 & =-1 \end{cases}.$$

Wir bekommen $\left\{ \begin{array}{|c|} \hline 0\cdot x_1 + \cdots + 0\cdot x_{k-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ 0\cdot x_1 + \cdots + 0\cdot x_{k-1} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \multicolumn{2}{|c|}{+a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n = b_1} \\ \hline +0\cdot x_k + & \\ \vdots & \text{Irgendwas} \\ +0\cdot x_k + & \\ \hline \end{array} \right.$

Bemerkung. Die Operation $Z_2 := Z_2 + 0\cdot Z_1$ ist keine elementare Operation, weil wir explizit verlangt haben, dass c in $Z_k := Z_k + c\cdot Z_i$ nicht 0 ist. Sie verändert aber das System nicht.

Jetzt betrachten wir das Untersystem, das aus den Gleichungen 2 bis $m+1$ besteht.

$$\left\{\begin{array}{lll}
0\cdot x_1+\cdots+0\cdot x_{k-1} & \multicolumn{2}{l}{\boxed{+a_{1k}x_k+\cdots+a_{1n}x_n=b_1}} \\
\vdots & +0\cdot x_k+ & \\
\vdots & \vdots & \text{Irgend-was} \\
0\cdot x_1+\cdots+0\cdot x_{k-1} & +0\cdot x_k+ &
\end{array}\right.$$

Es besteht aus $m(=m+1-1)$ Gleichungen.
Nach (IV) können wir das System durch endlich viele elementare Operationen auf Stufenform bringen. Da diese Operationen auch elementare Operationen des gesamten Systems sind,kann man durch endlich viele elementare Operationen das System auf die Form

$$\left\{\begin{array}{lll}
0\cdot x_1+\cdots+0\cdot x_{k-1} & \multicolumn{2}{l}{\boxed{+a_{1k}x_k+\cdots+a_{1n}x_n=b_1}} \\
\vdots & +0\cdot x_k+ & \\
\vdots & \vdots & \text{Stufen-form} \\
0\cdot x_1+\cdots+0\cdot x_{k-1} & +0\cdot x_k+ &
\end{array}\right.$$

bringen.

Bemerkung. Die Operationen ändern die ersten k Spalten nicht.

Wir bekommen ein System in Stufenform. □

Gauß-Algorithmus

Der Beweis gibt uns auch einen Weg, lineare Gleichungssysteme auf Stufenform zu bringen (Gauß-Algorithmus). **Bsp:**

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 9x_4 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 &= 1 \end{cases} \xrightarrow[]{\substack{Z_2 := Z_2 - \frac{3}{2}Z_1 \\ Z_3 := Z_3 - \frac{1}{2}Z_1}} \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 &= 2 \\ x_2 - x_3 + 0x_4 &= 1 \\ x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 0 \end{cases} \xrightarrow{Z_3 := Z_3 - Z_2}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 &= 2 \\ x_2 - x_3 + 0x_4 &= 1 \\ - 2x_3 + 2x_4 &= -1 \end{cases}$$ Gleichungssystem in Stufenform!

Da die elementaren Operationen die Lösungen erhalten, ist jede Lösung von $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 &= 2 \\ x_2 - x_3 + 0x_4 &= 1 \\ -2x_3 + 2x_4 &= -1 \end{cases}$ auch eine Lösung von $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 9x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 &= 1 \end{cases}$ und umgekehrt. Es ist einfach, die Lösungen eines Systems, das in Stufenform ist, zu bestimmen. Im Bsp oben:

Aus der der 3−ten Gleichung: $x_3 = x_4 + \frac{1}{2} \quad = r + \frac{1}{2}$

Aus der der 2−ten Gleichung: $x_2 = x_3 + 1 \quad = r + \frac{1}{2} + 1 = r + \frac{3}{2}$

Aus der der 1−ten Gleichung: $x_1 = -2x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 1 \quad = -7r - 3$

Also, jede Lösung $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_4)$ hat die Form $(-7r - 3, r + \frac{3}{2}, r + \frac{1}{2}, r)$, wobei r eine (beliebige) reelle Zahl ist, und umgekehrt: Jedes 4−Tupel der Form $(-7r - 3, r + \frac{3}{2}, r + \frac{1}{2}, r)$ ist eine Lösung. Nach Satz 1 und Folgerung 1 ist jede Lösung des ursprünglichen Systems eine Lösung des System in Stufenform und umgekehrt. Deswegen sind dies auch alle Lösungen des ursprünglichen Systems.