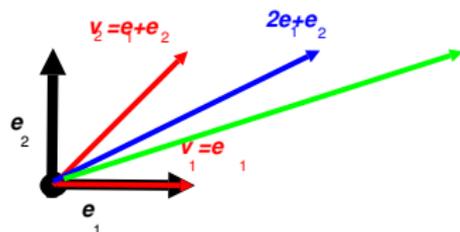


Wiederholung:

Wiederh. — Satz 13 Jede lineare Abbildung von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m ist die Multiplikation mit derjenigen Matrix, deren j -te Spalte das Bild von e_j ist.



Bsp: Betrachte Vektoren auf der Ebene $\overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{R}^2$, eine Basis (e_1, e_2) , Vektoren $v_1 := e_1$, $v_2 := e_1 + e_2$ und eine lin. Abbildung, die $e_1 \mapsto v_1$, $e_2 \mapsto v_2$. Die Koordinatenvektoren von v_1 und v_2 in der Basis e_1, e_2 sind offensichtlich $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Matrix der Abbildung ist deswegen $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Die Abbildung bildet $2e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ab.

Wied. Def. — Satz 14 Die Matrix der Verkettung der linearen Abbildungen $f_A, x \mapsto Ax$ und $f_B, y \mapsto By$ ist AB .

Quadratische Matrizen

$(n \times n)$ -Matrizen heißen **quadratische**. Die entsprechenden linearen Abbildungen sind laut Definition **Endomorphismen** des \mathbb{R}^n (weil $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$).

Das Produkt von $(n \times n)$ - Matrizen ist auch eine $(n \times n)$ - Matrix.

Def. Eine $(n \times n)$ Matrix B heißt die **inverse** Matrix zu einer

$(n \times n)$ -Matrix A , falls $BA = Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Frage Hat jede $(n \times n)$ Matrix eine inverse?

Nein! Die 0-Matrix $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ hat keine inverse Matrix.

In der Tat, für eine beliebige Matrix B ist $B\mathbf{0} =$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Def. Eine $(n \times n)$ - Matrix heißt **nichtausgeartet**, oder **invertierbar**, wenn sie eine Inverse hat.

Die inverse oder eine inverse?

Bemerkung. Später (Folg. 2 aus Satz 15) zeigen wir, dass **die** inverse Matrix eindeutig ist.

Satz 15 Sei A eine $(n \times n)$ - Matrix. Dann sind die folgende Aussagen äquivalent:

- (a) A hat eine inverse Matrix ($\stackrel{\text{Def.}}{\iff} A$ ist nichtausgeartet)
- (b) Die Abbildung $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, also die Multiplikation mit der Matrix A ist ein Isomorphismus.
- (c) Die Spalten von A sind linear unabhängig.

Beweis (a) \implies (b): zuerst Injektivität

(a) A hat eine inverse Matrix.

(b) Die Multiplikation mit der Matrix A ist ein Isomorphismus.

Beweis (a) \implies (b) Angenommen es gibt ein B mit $BA = Id$. Da wir nach Lemma 16 wissen, dass f_A linear ist, müssen wir nur zeigen, dass f_A bijektiv ist. **Wir zeigen zuerst, dass f_A injektiv ist.**

Sei $Av_1 = Av_2$ (Z.z.: $v_1 = v_2$). Wir multiplizieren die Gleichung $Av_1 = Av_2$ (von links) mit B und bekommen

$BAv_1 = BA v_2$. Da $BA = Id$ und $Id v = v$, gilt $v_1 = v_2$. Also, aus $f_A(v_1) = f_A(v_2)$ folgt $v_1 = v_2$. Dann ist f_A injektiv.

Bemerkung. Hier haben wir im Wesentlichen den Beweis von **Lemma 12(1)** in Richtung „ \Leftarrow “ aus Vorl. 7 wiederholt:

(Lemma 12(1) in Richtung „ \Leftarrow “ sagt, dass

f ist injektiv $\Leftarrow f$ hat eine Linksinverse.)

In unserem Fall ist f_B eine Linksinverse von f_A , weil

$$f_B \circ f_A(v) \stackrel{\text{Def. des Matrixprodukts}}{=} \underbrace{BA}_{Id} v = Id(v) = v.$$

Beweis (a) \implies (b): Surjektivität

(a) A hat eine inverse Matrix.

(b) Die Multiplikation mit der Matrix A ist ein Isomorphismus.

Wir haben eben bewiesen, dass die Abbildung f_A injektiv ist. Wir haben aber Bijektivität behauptet. Um zu zeigen, dass f_A auch surjektiv ist, benutzen wir die **Wichtige Anwendung der 1. Dimensionsformel**.

Wiederh. — Wicht. Anw. der 1. Dimensionsformel; Vorl. 9 Sei $f : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus, $\dim(V) = n < \infty$. Dann gilt:

$$f \text{ ist injektiv} \iff f \text{ ist surjektiv.}$$

Da die Matrix A quadratisch ist, ist $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ also ein Endomorphismus.

Wir haben bereits bewiesen, dass die Abbildung f_A injektiv ist. Dann ist sie nach **Wicht. Anw.** surjektiv; folglich bijektiv.

Beweis (b) \implies (c).

(b) Die Abbildung $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, also die Multiplikation mit der Matrix A , ist ein Isomorphismus.

(c) Die Spalten von A sind linear unabhängig.

Angenommen f_A ist ein Isomorphismus. Z.z.: Die Spalten von A sind linear unabhängig.

Die Vektoren u_1, \dots, u_n seien die Spalten von A , die Matrix sei also

$$\begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix} \quad \text{Dann ist die Linearkombination}$$

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1^1 & + \dots + & \lambda_n u_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 u_1^n & + \dots + & \lambda_n u_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^1 & \dots & u_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \quad (*)$$

Da f_A ein Isomorphismus ist, ist $\text{Kern}_{f_A} = \{\vec{0}\}$. Dann folgt aus $(*) = 0$,

dass $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$; die Vektoren (= Spalten) u_i sind dann linear unabhängig, □

Beweis (c) \implies (a)

(c) Die Spalten von A sind linear unabhängig.

(a) A hat eine inverse Matrix.

Die Spalten von A bezeichnen wir mit u_1, \dots, u_n . Sei $\{u_1, \dots, u_n\}$ linear unabhängig. Dann ist (u_1, \dots, u_n) eine Basis (Folgerung (a) aus dem Austauschsatz). Man betrachte die lineare Abbildung f , die $u_1 \mapsto e_1, u_2 \mapsto e_2, \dots, u_n \mapsto e_n$ (Existenz: Lemma 15). Wir zeigen: $f \circ f_A = Id$.
Tatsächlich, $e_i \xrightarrow{f_A} u_i \xrightarrow{f} e_i$. Also, $f \circ f_A(e_i) = e_i = Id(e_i)$. Aber es gibt GENAU EINE Abbildung (Lemma 15), die jedes e_i auf e_i abbildet. Eine solche Abbildung können wir sofort konstruieren, Id ist nämlich eine lineare Abbildung, sodass $Id(e_i) = e_i$ ($\forall i$). Also $f \circ f_A = Id$. Sei B die Matrix von f . Dann ist $BA \stackrel{\text{Def. Matrixprodukt}}{=} Id$. □

Bemerkung. Wir haben die gleiche Bezeichnung Id für zwei verschiedene Objekte – Id ist für uns eine Abbildung, $Id(v) = v$, und auch eine

$(n \times n)$ -Matrix $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. Seien Sie bitte nicht verwirrt.

Folgerung 1: Produkt von nichtausgearteten $(n \times n)$ -Matrizen ist nichtausgeartet.

Beweis. Seien A, B nichtausgeartete $(n \times n)$ -Matrizen. Dann sind f_A, f_B Isomorphismen nach Satz 15. Dann ist $f_A \circ f_B$ auch ein Isomorphismus nach der Folg. aus Lemma 17.

Dann ist die entsprechende Matrix, also AB , auch nichtausgeartet nach Satz 15, □

Rechenregeln. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Beweis. In der Tat, $(B^{-1}A^{-1})(AB) \stackrel{\text{Assoziativität}}{=} B^{-1}((A^{-1}A)B) = B^{-1}(Id \cdot B) = B^{-1}B = Id$.

Bemerkung. Das ist vollständig analog zur Rechenregel für das Invertieren von Isomorphismen („Coxeter“) aus Vorl. 9

Man kann die Folgerung „iterieren“: Wenn A, B, C nichtausgeartet sind, dann ist $ABC = A(\underbrace{BC}_{\text{nichtausg.}})$ nichtausgeartet. Dasselbe gilt für eine beliebige Anzahl von Matrizen.

Inverse zu inverse: rechenregeln

Frage. Sei A nichtausgeartet, also existiert A^{-1} mit $A^{-1}A = Id$. Ist A^{-1} auch nichtausgeartet? Eindeutig?

Folgerung 2 aus Satz 15 Sei $A \in Mat(n, n)$ nichtausgeartet. Dann gilt: die inverse Matrix ist eindeutig. Ferner gilt: A^{-1} ist auch nichtausgeartet, und $(A^{-1})^{-1} = A$.

Wiederholung – Lemma 14 Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus, so ist $f^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ebenfalls ein Isomorphismus.

Beweis der Folgerung 2. Angenommen, $A \in Mat(n, n)$ ist nichtausgeartet. Dann ist f_A ein Isomorphismus nach Satz 15. Dann ist $(f_A)^{-1}$ ebenfalls ein Isomorphismus. Sei B die Matrix von $(f_A)^{-1}$.

Wir haben $BA = [\text{Matrix von } (f_A)^{-1} \circ f_A] = Id$; also ist B eine inverse Matrix zu A . Außerdem haben wir:

$$AB = [\text{Matrix von } f_A \circ (f_A)^{-1}] = Id. \quad (*)$$

Angenommen die Matrix B' auch eine inverse Matrix zu A ist, d.h.,

$Id = B'A$. Wir multiplizieren diese Gleichung von rechts mit B und

bekommen $B = (B'A)B = B' \underbrace{(AB)}_{Id} = B'$; also $B = B'$ — Eindeutigkeit

ist bewiesen. Aus (*) und Eindeutigkeit von inverser Matrix folgt, dass $AA^{-1} = Id$; deswegen $(A^{-1})^{-1} = A$, □

Direkte Konstruktion einer inversen Matrix

Sei $A \in \text{Mat}(n, n)$. Die Spalten von A seien Vektoren u_1, \dots, u_n . Ist (u_1, \dots, u_n) keine Basis, so ist die Matrix nicht invertierbar (Satz 15). Ist sie eine Basis, kann man die Vektoren e_j als Linearkombination der Vektoren u_i darstellen, sei also

$$e_j = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} u_i. \quad (*)$$

(Für jedes j ist $(*)$ ein lineares Gleichungssystem aus n Gleichungen für n Unbekannte; also insgesamt müssen wir ein lineares Gleichungssystem aus n^2 Gleichungen für n^2 Unbekannte lösen.)

Dann ist die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} \quad (*)$$

die inverse Matrix zu A . Tatsächlich bildet nach Konstruktion die Multiplikation mit der Matrix den Vektor u_j auf $\sum_{i=1}^n \lambda_{ij} u_i = e_j$ ab. Also bildet BA jedes $e_j \xrightarrow{A} u_j \xrightarrow{B} e_j$ ab, also $f_{BA} = Id$ und folglich $BA = Id$.

Wir werden zwei bessere Algorithmen kennenlernen (einen heute noch, den zweiten später), um inverse Matrizen zu berechnen.

Matrizendarstellung von linearen Gleichungssystemen

Das lineare Gleichungssystem (m Gleichungen, n Unbekannte x_1, \dots, x_n .)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

kann man in Matrixform schreiben:

$Ax = b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \text{Mat}(m, n), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Die Matrix A heißt die **Koeffizientenmatrix** des Systems.

Die Matrix $A_{erw} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in \text{Mat}(m, n+1)$ heißt die **erweiterte Koeffizientenmatrix** des Systems.

Man kann die elementaren Zeilenoperationen aus Vorl. 1 als elementare Zeilenoperationen der erweiterten Koeffizientenmatrix verstehen.

Folgerung 3 aus Satz 15 Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in \text{Mat}(n, n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^n$. A ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist. In dem Fall ist die Lösung $x = A^{-1}b$.

Beweis: \implies Sei A nichtausgeartet. Dann ist das System tatsächlich lösbar: $x := A^{-1}b$ ist eine Lösung, weil $Ax = AA^{-1}b = b$.

In der Tat ist diese Lösung ist eindeutig: Sei x eine Lösung. Nach der Multiplikation der beiden Seiten der Gleichung $Ax = b$ mit A^{-1} bekommen wir: $A^{-1}Ax = A^{-1}b$, also $x = A^{-1}b$.

\Leftarrow Angenommen das System ist eindeutig lösbar. Dann ist das System $Ax = \vec{0}$ auch eindeutig lösbar. Tatsächlich, es ist lösbar, weil $\vec{0}$ eine Lösung ist. Falls noch eine Lösung $x' \neq 0$ des Systems $Ax = \vec{0}$ existiert, dann ist $x + x'$ eine Lösung von $Ax = b$ (weil $A(x + x') = Ax + Ax' = b + \vec{0} = b$), was den Voraussetzungen widerspricht. Also ist $Ax = \vec{0}$ eindeutig lösbar und die Lösung ist $x = \vec{0}$.

$$\text{Da } \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

die Linearkombination der Spalten von A mit Koeffizienten x_1, \dots, x_n ist, ist nur die triviale Linearkombination der Spalten gleich Null. Dann sind die Spalten von A linear unabhängig und die Matrix ist nichtausgeartet nach Satz 15. □

Exkurs: Kern_A und lineare Abhängigkeit der Spalten einer Matrix A

A sei eine $(n \times n)$ -Matrix. Aus der Äquivalenz der Aussagen $(b) \iff (c)$

(b) Die Abbildung $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, also die Multiplikation mit der Matrix A , ist ein Isomorphismus.

(c) Die Spalten von A sind linear unabhängig.

und aus **Wicht. Anw. 1. Dimensionsformel** wissen wir, dass A kein Isomorphismus ist $\iff \text{Kern}_A \neq \{\vec{0}\}$.

Wir kombinieren diese zwei Äquivalenzen und bekommen:

$\text{Kern}_{f_A} \neq \{\vec{0}\} \iff$ [die Spalten von A sind linear abhängig]

Versuchen wir, diese Aussage unabhängig von Satz 15 zu verstehen:

$\text{Kern}_{f_A} \neq \{\vec{0}\} \iff$ Spalten von A sind linear abhängig.

Frage. Wie findet man den Kern einer Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \text{Mat}(m, n)$$

(d.h. den Kern der entsprechenden Abbildung f_A)? Nach Definition

besteht Kern_A aus allen Vektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ sodass $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{0}$; das

bedeutet, Kern_A ist die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \stackrel{\text{ausrechnen}}{=} \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \stackrel{\text{ausrechnen}}{=} 0$$

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Das ist dasselbe Gleichungssystem, das wir bekommen, wenn wir

entscheiden ob die Vektoren $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind!!! Die

Lösungen davon bestehen aus Koeffizienten sodass die Linearkombination

von $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ gleich Null ist. Wir werden dies als eine **Beobachtung** formulieren.

Beobachtung.

Seien $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ die Spalten einer $(n \times m)$ -Matrix $A =$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt: ein Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \text{Kern}_A \iff x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \vec{0}.$

Also, mit Hilfe von inversen Matrizen können wir leicht (quadratische) Gleichungssysteme lösen – die Lösung von $Ax = b$ (wobei A eine nichtausgeartete quadratische Matrix ist) ist $x = A^{-1}b$; die Lösungsmenge ist also einelementig und ist $\{A^{-1}b\}$.

Man bemerke auch, dass wenn wir mehrere Gleichungssysteme mit gleichem A und verschiedenen b lösen sollen (was öfter in praktischen Aufgaben der Fall ist), wir einmal A invertieren und dann die verschiedenen b in die Formel $x = A^{-1}b$ einsetzen können.

Aber wie können wir die inverse Matrix ausrechnen? Mit der Definition ist es zu aufwendig – wir müssen ein Gleichungssystem aus n^2 linearen Gleichungen lösen und es ist nicht besonders effektiv, statt eines Gleichungssystems aus n Gleichungen ein Gleichungssystem aus n^2 Gleichungen zu lösen.

Es gibt aber andere Methoden, die inverse Matrix auszurechnen. Heute lernen wir das „Gaussverfahren“ (auch Gauss-Jordan-Verfahren genannt) und irgendwann später die Leibniz-Formel.

Standard-Basis in $Mat(n, n)$ – Wiederholung

Elementarmatrizen sind quadratische Matrizen von spezieller Gestalt.

Wiederholung. **Standard-Basis** in $Mat(n, n)$: Die Matrizen B_{ij} , deren (i, j) -Element gleich 1 ist und deren andere Elemente gleich 0 sind.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{(i,j)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Bsp: $B_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Elementarmatrizen in $Mat(n, n)$

Elementarmatrix von Typ 1. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\alpha \neq 0$. Falls $i \neq j$, setze $E_{ij}^\alpha := Id + \alpha B_{ij}$.

Bsp in D3. $E_{13}^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Allgemein gilt: Diagonalelemente sind alle gleich 1, auf dem (i, j) -Platz steht α , sonst steht überall 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{(i,j)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha_{(i,j)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Elementarmatrix von Typ 2. Für $i \in \{1, \dots, n\}$ und $\gamma \neq 0$, setze $E_i^\gamma = Id + (\gamma - 1)B_{ii}$.

Bsp in D3. $E_2^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (5-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Allgemein gilt: Diagonalelemente sind 1 mit Ausnahme der (i, i) -Stelle, auf welcher γ steht; sonst steht überall 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} + (\gamma - 1) \cdot \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & 1_{(i,i)} & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & \gamma_{(i,i)} & \\ & & & & 1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Elementarmatrix von Typ 3. Sei $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Setze

$$E_{ij} := Id - B_{ii} - B_{jj} + B_{ij} + B_{ji}$$

Bsp in D3. $E_{23} = E_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} +$
 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Allgemein gilt: Die i -te und die j -te Zeile sind vertauscht.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1_{(i,i)} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & 1_{(j,j)} & \\ & & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & 1_{(i,j)} & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & 1_{(j,i)} & & \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0_{(i,i)} & \cdots & 1_{(i,j)} \\ & \vdots & 1 & \vdots \\ & 1_{(j,i)} & \cdots & 0_{(j,j)} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Elementare Zeilenumformungen vom Typ 1,2,3 – Wiederholung

Typ 1

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (a_{k1} + \lambda a_{i1})x_1 & + \cdots + & (a_{kn} + \lambda a_{in})x_n & = & b_k + \lambda b_i & \leftarrow k\text{-te Zeile} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

Typ 2:

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c \cdot a_{k1}x_1 & + \cdots + & c \cdot a_{kn}x_n & = & c \cdot b_k \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

Typ 3:

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1}x_1 & + \cdots + & a_{kn}x_n & = & b_k & \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}x_1 & + \cdots + & a_{jn}x_n & = & b_j & \leftarrow k\text{-te Zeile} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

Eigenschaften der Elementarmatrizen

Sei A eine beliebige $(n \times n)$ -Matrix. Dann gilt:

1. Sei $i \neq j$. Es gilt: Multiplikation von links mit E_{ij}^λ addiert zur i -ten Zeile das λ -fache der j -ten Zeile. (Elementare Zeilenumformung (S1) aus Vorl. 1) Ferner gilt: $(E_{ij}^\lambda)^{-1} = E_{ij}^{-\lambda}$
2. Multiplikation von links mit E_i^λ multipliziert die i -te Zeile mit λ . (Elementare Zeilenumformung (S2) aus Vorl. 1) Ferner gilt: $(E_i^\lambda)^{-1} = E_i^{1/\lambda}$.
3. Multiplikation von links mit E_{ij} vertauscht die i -te und die j -te Zeile (von A) (Elementare Zeilenumformung (S3) aus Vorl. 1). Ferner gilt: $(E_{ij})^{-1} = E_{ij}$

Wir beweisen die Eigenschaften nur für die Elementarmatrizen vom Typ 1. Für die anderen Typen ist der Beweis analog, bitte unbedingt zu Hause probieren und wenn sie Schwierigkeiten damit haben, bitte in D3 „mit Gewalt“ ausrechnen.

Folgerung Jede Elementarmatrix ist nichtausgeartet. Ihre Inverse ist auch eine Elementarmatrix

Beweis der Folgerung. Die Matrix ist nichtausgeartet, wenn sie eine Inverse hat; die Inversen von Elementarmatrizen sind oben



Beweis der Eigenschaften einer Matrix vom Typ 1

Zu beweisende Eigenschaft: Multiplikation von links mit E_{ij}^λ addiert zur i -ten Zeile das λ -fache der j -ten Zeile.

Beweis. Nach Definition ist $E_{ij}^\lambda := Id + \lambda B_{ij}$. Dann gilt für beliebige

$$\text{Matrix } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}:$$

$$E_{ij}^\lambda A = (Id + \lambda B_{ij})A \stackrel{\text{Matrixaddition/Multiplikation ist distributiv}}{=} A + \lambda(B_{ij}A).$$

Rechnen wir $B_{ij}A$ aus, zuerst in einem Bsp: Wir nehmen B_{23} in D_3 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

[Was nicht in der i -ten Zeilen steht ist nicht wichtig] =

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} ? \cdot 0 + ? \cdot 0 + a_{31} \cdot 0 & ? \cdot 0 + ? \cdot 0 + a_{32} \cdot 0 & ? \cdot 0 + ? \cdot 0 + a_{33} \cdot 0 \\ ? \cdot 0 + ? \cdot 0 + a_{31} \cdot 1 & ? \cdot 0 + ? \cdot 0 + a_{32} \cdot 1 & ? \cdot 0 + ? \cdot 0 + a_{33} \cdot 1 \\ ? \cdot 0 + ? \cdot 0 + a_{31} \cdot 0 & ? \cdot 0 + ? \cdot 0 + a_{32} \cdot 0 & ? \cdot 0 + ? \cdot 0 + a_{33} \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Analog kann man das für beliebige n, i, j ausrechnen – $B_{ij}A$ ist eine Matrix, deren i -te Zeile die j -te Zeile von A ist und sonst nur Nullen enthält.

Dann ist $E_{ij}^\lambda A \stackrel{\text{wie oben erklärt}}{=} A + \lambda \cdot B_{ij}A$ wie wir behauptet haben: die j -Zeile ist mit Koeffizient λ zur i -ten Zeile addiert.

Zu beweisende Eigenschaft:

$$E_{ij}^{-\lambda} = \left(E_{ij}^{\lambda}\right)^{-1}.$$

Was ist $E_{ij}^{\lambda} Id$? Umformuliert: Was macht die Multiplikation mit E_{ij}^{λ} mit der Matrix Id ?

Dasselbe, was sie mit allen anderen Matrizen macht: sie addiert zu der i -ten Zeile von Id das λ -fache der j -ten Zeile.

Was ist $E_{ij}^{-\lambda} E_{ij}^{\lambda} Id$? Umformuliert: Was macht die Multiplikation mit $E_{ij}^{-\lambda}$ mit der Matrix $E_{ij}^{\lambda} Id$?

Dasselbe was sie mit allen anderen Matrizen macht: sie addiert zu der i -ten Zeile von $E_{ij}^{\lambda} Id$ das $(-\lambda)$ -fache der j -ten Zeile.

Also addiert die Multiplikation von $E_{ij}^{-\lambda} E_{ij}^{\lambda}$ mit Id zuerst zur i -ten Zeile das λ -fache der j -ten Zeile und dann zur i -ten Zeile des Ergebnisses das $-\lambda$ -fache der (selben) j -ten Zeile. Deswegen ändert die Multiplikation mit $E_{ij}^{-\lambda} E_{ij}^{\lambda}$ die Matrix Id nicht.

Also ist $E_{ij}^{-\lambda} E_{ij}^{\lambda} Id = Id$ und deswegen $E_{ij}^{-\lambda} E_{ij}^{\lambda} = Id$.

Satz 16 *Jede nichtausgeartete ($n \times n$) Matrix ist das Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen*

Frage *Kann eine ausgeartete Matrix Produkt von Elementarmatrizen sein?*

Nein! Produkt von nichtausgearteten Matrizen ist nichtausgeartet nach Folgerung 1 aus Satz 15.

Vor dem Beweis

Frage. Was ist $E_{12}^\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$?

Ich habe das gerade erklärt: Multiplikation mit E_{12}^λ addiert zur 1-ten Zeile das λ -fache der 2-ten Zeile. Dann ist

$$E_{12}^\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + \lambda a_{21} & a_{12} + \lambda a_{22} & a_{13} + \lambda a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Frage. Was ist $(E_3^\mu E_{12}^\lambda) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$?

Wegen Assoziativität ist $(E_3^\mu E_{12}^\lambda) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$

$$E_3^\mu \left(E_{12}^\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right) = E_3^\mu \begin{pmatrix} a_{11} + \lambda a_{21} & a_{12} + \lambda a_{22} & a_{13} + \lambda a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

[Multiplikation von links mit E_3^μ multipliziert die 3-te Zeile mit μ] =

$$\begin{pmatrix} a_{11} + \lambda a_{21} & a_{12} + \lambda a_{22} & a_{13} + \lambda a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \mu a_{31} & \mu a_{32} & \mu a_{33} \end{pmatrix}.$$

Rechnen Sie bitte selbst:

Was ist $(E_2^{1/\mu} E_{23} E_3^\mu E_{12}^\lambda) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$?

Antwort. Das ist $\left(E_2^{1/\mu} \left(E_{23} \begin{pmatrix} a_{11} + \lambda a_{21} & a_{12} + \lambda a_{22} & a_{13} + \lambda a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \mu a_{31} & \mu a_{32} & \mu a_{33} \end{pmatrix} \right) \right) =$
 $\begin{pmatrix} a_{11} + \lambda a_{21} & a_{12} + \lambda a_{22} & a_{13} + \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

Die Idee des Beweises

Sei A eine nichtausgeartete Matrix. Es genügt zu zeigen: Man kann sie mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix Id überführen. Tatsächlich, jede elementare Zeilenumformung ist dasselbe wie die Multiplikation mit einer geeigneten Elementarmatrix. Also gibt es Elementarmatrizen E_1, E_2, \dots, E_m , so dass

$$E_1 E_2 \dots E_m A = Id. \quad (*)$$

Dann ist $E_1 E_2 \dots E_m$ die inverse Matrix zu A , also

$$A = (E_1 E_2 \dots E_m)^{-1} = E_m^{-1} \dots E_2^{-1} E_1^{-1}.$$

Aber die inverse Matrix einer Elementarmatrix ist auch eine Elementarmatrix. Also ist $A = E_m^{-1} \dots E_2^{-1} E_1^{-1}$ ein Produkt von Elementarmatrizen

Wie kann man eine nichtausgeartete Matrix mit Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix I_d überführen?

Schritt 1. Mit dem Gauß-Algorithmus kann man eine Matrix in Stufenform bringen. Wir werden zeigen, dass wenn die ursprüngliche Matrix **nichtausgeartet ist**, dann alle „Stufen“ die Länge 1 haben, also die

Stufenform der Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ist,

wobei alle Diagonalelementen $a_{ii} \neq 0$.

Schritt 2. Jetzt benutzen wir die Operationen des Typs 1 um alle **Elemente über der Diagonalen** auf 0 zu bringen: um z.B. das $(1, 2)$ -Element auf Null zu bringen, addieren wir zur 1. Zeile das $\left(-\frac{a_{12}}{a_{22}}\right)$ -fache der zweiten Zeile. Wir machen dies für alle **Elemente über der Diagonalen'**, d.h. (i, j) -Plätze mit $i < j$. Wir bekommen dann die

Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Schritt 3. Mit Operationen von Typ 2 (Multiplizieren der i -ten Zeile, $i = 1, \dots, n$, mit einem geeigneten Skalar; in unserem Fall mit $\frac{1}{a_{ii}}$) bekommen wir die Einheitsmatrix.

Beispiel in D3

Schritt 1. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ Vertausche die erste und die dritte Zeile $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$

Subtrahiere das Doppelte der ersten Zeile von der zweiten $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$

Subtrahiere das Dreifache der ersten Zeile von der dritten $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow$

Vertausche die zweite und die dritte Zeile und multipliziere diese mit $-1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Die Matrix ist in Stufenform; wir sehen, dass die Diagonalelemente nicht 0 sind (wie gesagt ist dies immer der Fall, wenn die ursprüngliche Matrix nichtausgeartet ist.)

Schritt 2 Subtrahiere das Doppelte der zweiten Zeile von der ersten \rightarrow
 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Addiere das achtfache der dritten Zeile zur ersten $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$

Subtrahiere das Fünffache der dritten Zeile von der zweiten $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$ wie wir

wollten.

Schritt 3 Fällt in diesem Bsp. weg, weil wir bereits die Einheitsmatrix bekommen haben. Das ist Zufall; in der Regel liefert Schritt 2 nur eine Diagonalmatrix und man muss noch mit Operationen vom Typ 2 (Zeilen mit Skalaren multiplizieren) die Diagonalelemente auf 1 bringen.

Beweis von Satz 16

Aus Satz 2 (Gauß) folgt: Jede Matrix kann man auf Stufenform mit Hilfe von endlich vielen elementaren Zeilenumformungen bringen. Wir wissen, dass jede elementare Zeilenumformung mit der Matrix dasselbe macht wie eine Multiplikation von links mit einer geeigneten Elementarmatrix. Also existieren (sagen wir k) Elementarmatrizen E_1, \dots, E_k sodass

$$A^{(k)} = E_1 \dots E_k A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & \dots & a_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

(Da die Matrix eine $(n \times n)$ -Matrix in Stufenform ist, sind alle Elemente unter der Diagonalen gleich 0.)

Da die Matrix A nichtausgeartet ist, ist auch die Matrix $A^{(k)}$ nichtausgeartet. Denn nach Folg. 1 aus Satz 15 ist

$$A^{(k)} = \underbrace{E_1 \dots E_k}_{\text{Produkt von nichtausg. Matrizen}} \cdot A, \text{ also eine nichtausgeartete Matrix.}$$

Produkt von nichtausg. Matrizen

Wir haben bewiesen, dass Elementarmatrizen E_1, \dots, E_k existieren, sodass

$A^{(k)} := E_1 \dots E_k \cdot A$ die Form $\begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & \dots & a_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$ hat; ferner wissen wir,

dass $A^{(k)}$ nichtausgeartet ist.

Wir zeigen jetzt, dass die Elemente $a_{ii}^{(k)}$ auf der Diagonale $\neq 0$ sind.

Widerspruchsbeweis. Angenommen das i -te Element auf der Diagonalen von $A^{(k)}$ ist gleich 0. Wir betrachten die Vektoren $A^{(k)}e_j$, wobei $j \leq i$ (also die ersten i Spalten von $A^{(k)}$). Nur die ersten $i - 1$ Einträge von diesen Vektoren können ungleich 0 sein, weil die letzten $n - i + 1$ Einträge der ersten i Spalten gleich 0 sind. Dann sind die Vektoren $A^{(k)}e_j$ (wobei $j \leq i$) Linearkombinationen der Vektoren e_1, \dots, e_{i-1} . Dann ist $\dim(\text{Span}(\{A^{(k)}e_j, j = 1, \dots, i\})) \leq i - 1$. Folglich sind die Vektoren $A^{(k)}e_j$ linear abhängig nach Folg (a) aus dem Austauschsatz, was nach Satz 15 unmöglich ist (weil $A^{(k)}$ nichtausgeartet ist). Der Widerspruch zeigt, dass alle Diagonalelemente $a_{ii}^{(k)} \neq 0$ sind.

Schritt 2 Wir wollen jetzt die Elemente über der Diagonalen mit Hilfe einer Multiplikation von links mit Elementarmatrizen E_{ij}^λ , also mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen vom Typ 1, auf 0 bringen.

Um ein Element $a_{ij}^{(k)}$ (wobei $i < j$) auf Null zu bringen, multiplizieren wir die Matrix mit E_{ij}^λ , wobei $\lambda = -\frac{a_{ij}^{(k)}}{a_{jj}^{(k)}}$. Diese Multiplikation addiert zur i -ten Zeile die j -te Zeile der Matrix $A^{(k)}$ und ändert die Elemente unter der Diagonalen der Matrix nicht. Auf dem Platz (i, j) des Ergebnisses steht $a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ij}^{(k)}}{a_{jj}^{(k)}} a_{jj}^{(k)} = 0$. Wir tun das zuerst für die zweite Spalte, dann für die dritte u.s.w.

Wir bekommen eine Matrix bei der nur die Elemente auf der Diagonalen von 0 verschieden sind (man bemerke, dass die Elemente auf der Diagonalen dieselben wie in der Matrix $A^{(k)}$ und deswegen nicht 0 sind.) Also existieren Elementarmatrizen E_1, \dots, E_m , sodass $A^{(m)} := E_1 \dots E_m \cdot A$ Diagonalform hat,

$$A^{(m)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & \dots & 0 \\ \vdots & & 0 \\ 0 & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

Schritt 3. Mit Hilfe einer Multiplikation mit geeigneten E_i^λ können wir auch die Elemente auf der Diagonalen zu 1 machen. Wir bekommen die Id Matrix, also

$$E_1 E_2 \dots E_r A = Id.$$

□

Beispiel zum Beweis/ Konstruktion der inversen Matrix:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} & Id &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 E_{12}A &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} & E_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 E_{31}^1 E_{12}A &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix} & E_{31}^1 E_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 E_{32}^{-2} E_{31}^1 E_{12}A &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & E_{32}^{-2} E_{31}^1 E_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 E_{13}^{-11} E_{23}^{-6} E_{32}^{-2} E_{31}^1 E_{12}A &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & E_{13}^{-11} E_{23}^{-6} E_{32}^{-2} E_{31}^1 E_{12} &= \begin{pmatrix} 22 & 10 & -11 \\ 13 & -6 & -6 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 E_{12}^{-1} E_{13}^{-11} E_{23}^{-6} E_{32}^{-2} E_{31}^1 E_{12}A &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & E_{12}^{-1} E_{13}^{-11} E_{23}^{-6} E_{32}^{-2} E_{31}^1 E_{12} &= \begin{pmatrix} 9 & -4 & -5 \\ 13 & -6 & -6 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 E_1^{1/2} E_2^{1/3} E_{12}^{-1} E_{13}^{-11} E_{23}^{-6} E_{32}^{-2} E_{31}^1 E_{12}A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & E_1^{1/2} E_2^{1/3} E_{12}^{-1} E_{13}^{-11} E_{23}^{-6} E_{32}^{-2} E_{31}^1 E_{12} &= \begin{pmatrix} 9/2 & -2 & -5/2 \\ 13/3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Also ist die inverse Matrix $E_1^{1/2} E_2^{1/3} E_{12}^{-1} E_{13}^{-11} E_{23}^{-6} E_{32}^{-2} E_{31}^1 E_{12} Id$

Also haben wir die inverse Matrix zur $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

konstruiert: sie ist

$A^{-1} = E_1^{1/2} E_2^{1/3} E_{12}^{-1} E_{13}^{-11} E_{23}^{-6} E_{32}^{-2} E_{31}^1 E_{12}$ (wir haben sie auch ausgerechnet; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 9/2 & -2 & -5/2 \\ 13/3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, aber diese lange Formel ist nützlich für uns.)

Dann können wir sie invertieren: da $(A^{-1})^{-1} = A$ nach Rechenregeln (direkt nach Folg. 1 aus Satz 15).

$$\begin{aligned} A &= (A^{-1})^{-1} = \left(E_1^{1/2} E_2^{1/3} E_{12}^{-1} E_{13}^{-11} E_{23}^{-6} E_{32}^{-2} E_{31}^1 E_{12} \right)^{-1} \\ &= E_{12} E_{31}^{-1} E_{32}^2 E_{23}^6 E_{13}^{11} E_{12}^1 E_2^3 E_1^2 \end{aligned}$$

Methode der Elementarmatrizen zum Berechnen der inversen Matrix

Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Die Idee: um mit dem Gauß-Algorithmus die Zerlegung von A in ein Produkt von Elementarmatrizen zu bekommen, haben wir Elementarmatrizen E_1, \dots, E_r gefunden, sodass $E_1 \dots E_r \cdot A = Id$. Dann ist das Produkt $E_1 \dots E_r$ gleich der inversen Matrix von A .

Die Matrizen E_1, \dots, E_r entsprechen den elementaren Zeilenoperationen, die wir durchgeführt haben, um aus A die Einheitmatrix zu bekommen. Wenn wir dieselben Zeilenoperationen in derselben Reihenfolge auf Id anwenden, bekommen wir die Matrix $E_1 \dots E_r$, also die zu A inverse Matrix.

Algorithmus. Schreibe die Matrix Id neben A .

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 1 \end{array} \right)$$

Mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen überführen wir die Matrix A in Id . Jede elementare Zeilenumformung wird auch auf der rechten Seite angewendet. Wenn links Id steht, steht rechts A^{-1} .

Bsp: Invertiere die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{ Zeile II} := \text{Zeile II} - 2(\text{Zeile I})$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \text{ Zeile I} := \text{Zeile I} - 2(\text{Zeile II})$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \text{ Rechts steht die inverse Matrix zu } A.$$

Wir machen es für $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Vertausche die erste und die dritte Zeile

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Subtrahiere das Doppelte der ersten Zeile von der zweiten

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Subtrahiere das Dreifache der ersten Zeile von der dritten

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & 0 & -3 \end{array} \right)$$

Vertausche die zweite und die dritte Zeile und multipliziere diese mit -1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

Subtrahiere das Doppelte der zweiten Zeile von der ersten

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -8 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

Addiere das Achtfache der dritten Zeile zur ersten $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 8 & -21 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$

Subtrahiere das Fünffache der dritten Zeile von der zweiten $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 8 & -21 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -5 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$

Links steht Id , also steht rechts A^{-1} . Also $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -21 \\ -1 & -5 & 13 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$