Abschnitt: Determinanten

Bezeichnung Die i-te Zeile werden wir mit $[a_i]$ bezeichnen. Die Null-Zeile werden wir mit $\mathbf{0}$ bezeichnen. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$.

Def. *Eine Abbildung* $det : Mat(n, n) \to \mathbb{R}$ *heißt eine Determinantenabbildung (oder Determinantenfunktion), falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind*

D1 *Eine Determinante ist linear in jeder Zeile, d.h.*

$$det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] + [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \quad ; \quad det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ \lambda [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = \lambda det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

D2 *(Eine Determinante ist alternierend): Stimmen zwei Zeilen der Matrix* A *überein, so ist* $det(A) = 0$.

D3 *(Eine Determinante ist normiert):* $det(Id) = 1$

Fragen *Existiert eine solche Funktion? Ist sie eindeutig? Wie kann man sie ausrechnen?*

Satz 17 *Sei det* : $M(n,n) \to \mathbb{R}$ *eine Determinantenabbildung. Dann gilt für alle* $A, B \in Mat(n,n)$ *und alle* $\lambda \in \mathbb{R}$*:*

- D4 *Ist eine Zeile von A gleich* $\mathbf{0}$*, so ist* $det(A) = 0$.
- D5 *Entsteht B aus A durch Vertauschung zweier Zeilen, so ist* $det(B) = -det(A)$.
- D6 *Entsteht B aus A durch Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen, so ist* $det(B) = det(A)$.

Beweis für (D4):

$$det(A) =_{det} \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ 0 \cdot \mathbf{0} \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \overset{\text{Linearität}}{=} 0 \cdot det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = 0$$

Beweis für (D5):

$$0 \overset{(D2)}{=} det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \ i\text{-te Zeile} \\ \\ \leftarrow \ j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{matrix} \overset{\text{Linearität}}{=} det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Linearität}}{=} det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \overset{(D2)}{=}$$

$$0 + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + 0; \quad \text{Also} \quad det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = -det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

$\square$

Beweis für (D6)

$$det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] + \lambda\,[a_j] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \ i\text{-te Zeile} \\ \\ \leftarrow \ j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array} \overset{\text{Linearität}}{=} det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + \lambda det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \overset{(D2)}{=}$$

$$det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + \lambda 0$$

$\square$

Folgerung *Sind die Zeilen von $A \in Mat(n,n)$ linear abhängig, so ist $det(A) = 0$.*

Beweis. Angenommen $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, [a_i] = \mathbf{0}$, wobei nicht alle λ_i gleich 0 sind. OBdA ist dann $\lambda_1 \neq 0$, sonst die Zeilen vertauschen. Dann ist $[a_1] = -\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} [a_i]$, also

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} -\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} [a_i] \,, \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \overset{\text{Linearität}}{=} -\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \det \underbrace{\begin{pmatrix} [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}}_{Z1=Zi} \overset{\text{(D2)}}{=} \sum_{i=2}^{n} 0 = 0$$

$\square$

Die Eigenschaften **(D1–D6)** erlauben uns, Determinanten von einigen Matrizen auszurechen

Bsp. $det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{\text{(D6); Z2:=Z2- 2 Z1}}{=} det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{(D1); Z2:=(-1)}\cdot\text{Z2}}{=}$
$-det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{(D6); Z1:=Z1- 2 Z2}}{=} -det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{(D3)}}{=} -1.$

Bsp. $det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 0$. In der Tat, die Zeilen der Matrix sind linear abhängig:

$$-Z1+2\cdot Z2-Z3 = -[1,2,3]+2\cdot[4,5,6]-[7,8,9] = [0,0,0].$$

Dann ist $det = 0$ nach Folgerung aus Satz 17.

Wiederh. — Schwächere Version von Wicht. Anw. der 1. Dimensionsformel; Vorl. 9 Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus, $dim(V) = n < \infty$. Dann gilt:

$$f \text{ ist injektiv} \iff f \text{ ist ein Isomorphismus.}$$

Hilfssatz $\rightleftharpoons$ Wicht. Anw. 1. Dimensionsformel

$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *ist kein Isomorphismus* $\iff \exists x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \vec{0}$ *s.d.* $Ax = \vec{0}$

Beweis. In det Tat, nach Lemma 11(c) ist f_A genau dann injektiv, wenn $Kern_A = \{\vec{0}\}$, also wenn kein $x \neq \vec{0}$ existiert mit $Ax = \vec{0}$.

Also wenn ein solches x existiert, dann ist f_A kein Isomorphismus.

Wenn f_A kein Isomorphismus ist, dann ist f_A nicht injektiv. In der Tat, f_A ist nicht injektiv oder nicht surjektiv; aber nach **Wicht. Anw. 1. Dimensionsformel** gilt

$$f_A \text{ injektiv} \iff f_A \text{ surjektiv.}$$

Wenn f_A nicht injektiv ist, dann ist $Kern_A \overset{\text{Lem. 11(c)}}{\neq} \{\vec{0}\}$, also $\exists x \neq \vec{0}$ mit $Ax = \vec{0}$.

Satz 18 *Ist A ausgeartet, so ist $det(A) = 0$*

Bemerkung. Wir werden heute auch beweisen (Lemma 20), dass aus $det(A) = 0$ folgt, dass A ausgeartet ist.

Satz 18 *Ist A ausgeartet, so ist $det(A) = 0$*

Beweis. Sei $A \in Mat(n,n)$ ausgeartet. $\stackrel{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ es gibt ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.

Wir betrachten $Mat(1,n) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{R}\}$ und

$$f : Mat(1,n) \to Mat(1,n), \quad f(y) := yA = (y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung f ist offensichtlich linear. Wir zeigen: f ist kein Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $yA = (1, 0, ..., 0)$. Dann ist

$$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{cases} (0), \ \text{weil } Ax = \vec{0} \\ \\ x_1 \neq 0, \quad \text{weil } (y_1, \dots, y_n)A = (1, 0, \dots, 0) \\ \qquad \text{und } (1, 0, \dots, 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \end{cases}$$

Der Widerspruch zeigt, dass f kein Isomorphismus ist. $\stackrel{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ Es gibt ein

$$(\lambda_1, ...\lambda_n) \neq \mathbf{0} \text{ mit } (\lambda_1, ...\lambda_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda_1 [a_1] + ... + \lambda_n [a_n] = \mathbf{0}$$

$\stackrel{\text{Folgerung}}{\Longrightarrow} det(A) = 0.$ □

Ziel: zu zeigen, dass eine Determinantenfunktion (falls sie existiert) eindeutig ist

Frage 1 Angenommen, wir kennen $det(A)$. Was ist $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{i}^{\lambda}A)$?

Antwort: Sei A eine Matrix. Wir wissen (Vorl. 11), dass eine Multiplikation von links mit E_{ij} die $i-$te und die $j-$te Zeile der Matrix A vertauscht (wir nehmen an, dass $i \neq j$; falls $i = j$ dann ist $E_{ii}A = A$ und $det(E_{ii}A){=}det(A)$).
Die Matrix $B := E_{ij}A$ entstehet also aus A durch Vertauschung der $i-$ten und $j-$ten Zeile. Nach (D5) aus Satz 17 ist $det(B) = det(E_{ij}A) = -det(A)$. Wenn wir also $det(A)$ kennen, kennen wir auch $det(E_{ij})A$.

Analog für die zwei weiteren Typen von Elementarmatrizen:

$det(E_{ij}^{\lambda}A)) \overset{(D6)}{=} det(A)$,

$det(E_{i}^{\lambda}A) \overset{\text{(D1)}}{=} \lambda det(A)$.

Außerdem gilt: ist $det(A) \neq 0$, so sind $det(E_{ij}A)(= \pm det(A))$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)(= det(A))$, $det(E_{i}^{\lambda}A)(= \lambda \cdot det(A))$ auch nicht 0; man bemerke hier, dass λ in E_{i}^{λ} nicht 0 ist.

Frage 2. Was ist $det(E_{ij})$, $det(E_{ij}^{\lambda})$, $det(E_i^{\lambda})$?
Antwort. Wir wissen, dass $det(E_{ij}) = det(E_{ij} \cdot Id)$. Außerdem wissen wir, dass $det(Id) \overset{(D3)}{=} 1$. Oben haben wir gesehen, dass $det(E_{ij}A) = -det(A)$ für $i \neq j$ und $det(E_{ii}A) = det(A)$. Für die Matrix $A = Id$ und $i \neq j$ haben wir $det(E_{ij}) = det(E_{ij} \cdot Id) = -det(Id) \overset{(D3)}{=} -1$.

Analog für die zwei weiteren Typen von Elementarmatrizen:

$det(E_{ij}^{\lambda})) = det(E_{ij}^{\lambda} Id)) \overset{\text{s.o.}}{=} det(Id) \overset{(D3)}{=} 1.$

$det(E_i^{\lambda})) = det(E_i^{\lambda} Id)) \overset{\text{s.o.}}{=} \lambda det(Id) \overset{(D3)}{=} \lambda.$

Antworten auf Fragen 1,2 als Rechnenregeln

Rechnenregeln: Für jede Matrix $A \in Mat(n, n)$ gilt:

- $det(E_{ij}^{\lambda} A) = det(A)$,
- $det(E_i^{\lambda} A) = \lambda \cdot det(A)$
- $det(E_{ij} A) = -det(A)$ für $i \neq j$ und $det(E_{ii} A) = det(A)$

Daraus folgt (Antwort auf Frage 2; für A setzen wir Id ein und benutzen, dass nach (D3) $det(Id) = 1$ ist):

- $det(E_{ij}^{\lambda}) = 1$,
- $det(E_i^{\lambda}) = \lambda$
- $det(E_{ij}) = -1$ für $i \neq j$ und $det(E_{ii}) = 1$

Wir kombiniereren diese zwei Antworten in einem Lemma:

Lemma 19. Für jede Matrix A und für jede Elementarmatrix E gilt: $det(EA) = det(E) \cdot det(A)$.

Lemma 20(Eindeutigkeit der Determinante) *Es gibt höchstens eine Determinantenabbildung. Ferner gilt: ist $A \in Mat(n,n)$ nichtausgeartet, so ist $det(A) \neq 0$*

Beweis. Ist A ausgeartet, so ist $det(A) \overset{\text{Satz 18}}{=} 0$. Ist A nichtsausgeartet, so kann man A in ein Produkt von Elementarmatrizen zerlegen (Satz 16): $A = E_1 ... E_{m-1} E_m Id$.

Durch mehrfache Anwendung von Lemma 19 bekommen wir:
$det(A) = det(E_1 E_2 E_3 ... E_m) \overset{\text{Lem. 19}}{=} det(E_1) \cdot \det(E_2 E_3 ... E_m) \overset{\text{Lem. 19}}{=} det(E_1) \cdot \det(E_2) det(E_3 ... E_m) = ... = det(E_1) \cdot \det(E_2) \cdot det(E_3) \cdot ... \cdot \det(E_m)$.
Aber die Determinanten der Elementarmatrizen sind eindeutig bestimmt; siehe vorherige Folie. Dann sind alle Faktoren im Produkt
$det(A) = det(E_1) \cdot \det(E_2) \cdot det(E_{m-1}) \cdot ... \cdot \det(E_m)$ eindeutig bestimmt; also ist $det(A)$ auch eindeutig bestimmt, $\square$

Folgerung. Für $A = E_1 ... E_m$ (wobei E_i Elementarmatrizen sind) gilt: $det(A) = det(E_1) \cdot ... \cdot det(E_m)$.

Bemerkung. Bis jetzt wissen wir nicht, ob eine Determinantenfunktion existiert – Lemma 20 sagt uns, dass falls sie existiert, sie eindeutig ist (d.h. es könnte keine zwei verschiedenen Funktionen $det, det' : Mat(n,n) \to \mathbb{R}$ geben, die die Bedienungen (D1), (D2), (D3) erfüllen).

Bsp. zum Beweis von Lemma 20

In Vorl. 11 haben wir eine Zerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ in ein Produkt von Elementarmatrizen gefunden:
$A = E_{12} E_{31}^{-1} E_{32}^{2} E_{23}^{6} E_{13}^{11} E_{12}^{1} E_{2}^{3} E_{1}^{2}$.
Wir zeigen, dass diese Zerlegung uns erlaubt, $det(A)$ zu berechnen: nach Folgerung aus Lem. 19 gilt:
$det(A) =$
$\underbrace{det(E_{12})}_{-1} \underbrace{det(E_{31}^{-1})}_{1} \underbrace{det(E_{32}^{2})}_{1} \underbrace{det(E_{23}^{6})}_{1} \underbrace{det(E_{13}^{11})}_{1} \underbrace{det(E_{12}^{1})}_{1} \underbrace{det(E_{2}^{3})}_{3} \underbrace{det(E_{1}^{2})}_{2} =$
-6
Wir haben gesehen, dass die Eigenschaften (D1),(D2), (D3) (und (D4), (D5), (D6) sowie Lemma 19, die aus (D1),(D2), (D3) folgen) $det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ eindeutig bestimmen!!!

Satz 19 $A, B \in Mat(n,n)$. Dann ist $det(AB) = det(A)det(B)$.

Beweis. 2 Fälle: A ausgeartet und A nichtausgeartet.

Fall 1 Sei A ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ f_A ist keine Surjektion. Dann ist $f_A \circ f_B$ auch keine Surjektion (weil ein $v \in \mathbb{R}^n$, das nicht in der Form $f_A(u)$ darstellbar ist, auch nicht in der Form $f_A(f_B(w))$ darstellbar ist.)

Dann ist AB ausgeartet nach Satz 15
$\overset{\text{Satz 18}}{\Longrightarrow}$ $det(AB) = 0 = \underbrace{det(A)}_{=0} det(B)$, $\square$.

Fall 2 Sei A nichtausgeartet. $\overset{\text{Satz 16}}{\Longrightarrow}$ $A = E_1 E_2 ... E_m$.
Dann ist $det(AB) = det(E_1 E_2 ... E_m B) = det(E_1) det(E_2 ... E_m B) =$
$det(E_1)det(E_2)det(E_3 ... E_m B) = \; ...$
$= \underbrace{det(E_1)det(E_2)...det(E_m)}_{det(A) \text{ nach Folg. aus Lem. 19}} \mathrm{det}(B) = det(A)det(B)$, $\square$

Satz 20 *Es gibt genau eine Determinantenabbildung*
Beweis. Eindeutigkeit ist bewiesen (Lemma 20). Wir zeigen Existenz. Induktion nach n.
I.A. $n = 1$. $Mat(1,1) = \{(x), \text{ wobei } x \in \mathbb{R}\}$. Definiere $det((x)) := x$. Die Eigenschaften (D1), (D2), (D3) sind erfüllt.
I.V. Es gibt eine Determinantenabbildung $det : Mat(n-1, n-1) \to \mathbb{R}$.
I.S. Z.z.: Es gibt eine Determinantenabbildung $det : Mat(n,n) \to \mathbb{R}$.
Sei $A \in Mat(n,n)$. Wir wählen ein $j \in \{1,...,n\}$ und setzen

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}), \qquad \text{Laplace-Spaltenentwicklung}$$

wobei A_{ij}^{Str} diejenige $(n-1) \times (n-1)$ Matrix bezeichne, welche durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht.

$$A^{Str}{}_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\ j-1} & a_{1j} & a_{1\ j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\ 1} & \cdots & a_{i-1\ j-1} & a_{i-1\ j} & a_{i-1\ j+1} & \cdots & a_{i-1\ n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{i\ j-1} & a_{ij} & a_{i\ j+1} & \cdots & a_{i\ n} \\ a_{i+1\ 1} & \cdots & a_{i+1\ j-1} & a_{i+1\ j} & a_{i+1\ j+1} & \cdots & a_{i+1\ n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\ j-1} & a_{nj} & a_{n\ j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Bsp: Laplace-Spaltenentwicklung für $n = 2$

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$j \overset{\text{z.B.}}{=} 2$

$$det(A) = (-1)^{1+2} a_{12} det(A_{12}^{Str}) + (-1)^{2+2} a_{22} det(A_{22}^{Str}) = -a_{12} a_{21} + a_{22} a_{11}$$

$det(A_{12}^{Str}) = a_{21}$; $det(A_{22}^{Str}) = a_{11}$;

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Mnemonische Regel: *det* einer (2×2) Matrix ist das Produkt der Diagonalelemente minus das Produkt der Antidiagonalelemente.

Z.z.: $det(A) := \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str})$ erfüllt die Eigenschaften (D1) –(D3).

D1 $\tilde{A}$ entstehe aus A durch Multiplikation der $k-$ten Zeile mit λ. Vor dem Multiplizieren:

$$det(A) := (-1)^{k+j} a_{kj} det(A_{kj}^{Str}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str})$$

Nach dem Multiplizieren:

$$det(\tilde{A}) := (-1)^{k+j} \underbrace{\tilde{a}_{kj}}_{\lambda a_{kj}} \underbrace{det(\tilde{A}_{kj}^{Str})}_{det(A_{kj}^{Str})} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (-1)^{i+j} \underbrace{\tilde{a}_{ij}}_{a_{ij}} \underbrace{det(\tilde{A}_{ij}^{Str})}_{\lambda det(A^{Str})}$$

$$= \lambda det(A)$$

Die Additivität zeigt man analog.

Beweis (D2)

Angenommen, die k-te und die m-te Zeile von A stimmen überein ($k < m$); Z.z: $det(A) = 0$. Wir haben

$$det(A) := (-1)^{k+j} a_{kj} det(A_{kj}^{Str}) + (-1)^{m+j} a_{mj} det(A_{mj}^{Str}) +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq m}}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) \overset{(D2)}{=}$$

$$(-1)^{k+j} a_{kj} det(A_{kj}^{Str}) + (-1)^{m+j} a_{mj} det(A_{mj}^{Str}) + 0 \qquad (*)$$

Da die k-te und die m-te Zeile gleich sind, ist $a_{kj} = a_{mj}$. Da A_{kj}^{Str} aus A_{mj}^{Str} durch $m - k - 1$ Zeilenvertauschungen hervorgeht. Also $det(A_{kj}^{Str}) = (-1)^{m-k-1} det(A_{mj}^{Str})$. Dann ist $(*)$ gleich $((-1)^{k+j+m-k-1} + (-1)^{m+j}) det(A_{mj}^{Str}) =$
$((-1)^{j+m-1} + (-1)^{m+j}) det(A_{mj}^{Str}) = 0$

Beweis (D3)

Für $A = Id$ ist

$$det(Id) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str})$$

mit $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases}$

Also aus der Summe $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str})$ ist nur $i-$te Summante nicht 0; deswegen $det(Id) = (-1)^{i+i} det(Id) = 1.$ $\square$

Folgerung (Spaltenentwicklungssatz von Laplace) *Für jedes $A \in Mat(n, n)$ gilt*

$$(D7) \qquad det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) \qquad (*),$$

Beweis: Es gibt nur eine Determinantenabbildung (Lemma 20) und wir haben sie mit Hilfe von $(*)$ konstruiert, $\square$

Anwendung: Determinante einer (3×3) Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad , \qquad j \overset{\text{z.B.}}{=} 1$$

$$det(A) \overset{\text{Folgerung}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) =$$

$$(-1)^{1+1} a_{11} det(A_{11}^{Str}) + (-1)^{2+1} a_{21} det(A_{21}^{Str}) + (-1)^{3+1} a_{31} det(A_{31}^{Str}) =$$

$$(-1)^2 a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + (-1)^3 a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) +$$

$$(-1)^{3+1} a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Mnemonische Regel: *det einer (3×3) Matrix ist die Summe der Produkte der Elemente aus der Hauptdiagonalen sowie der Elemente aus den Nebendiagonalen minus die Summe der Produkten der Elemente aus den Antidiagonalen sowie der Elemente aus den Nebenantidiagonalen*

Mnemonische Regel von Sarrus (Rechenverfahren)

Dabei schreibt man die ersten beiden Spalten der Matrix rechts neben die Matrix und bildet Produkte von je 3 Zahlen, die durch die schrägen Linien verbunden sind. Dann werden die nach unten verlaufenden Produkte addiert und davon die nach oben verlaufenden Produkte subtrahiert. Man erhält auf diese Weise die Determinante von A:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\ & \diagdown & & \times & & \times & & \diagup & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\ & \diagup & & \times & & \times & & \diagdown & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32} \end{array}$$

Weitere Anwendungen der Laplace-Spaltenentwicklung

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \overset{\text{Spaltenentw. j=1}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} det(A_{i1}^{Str})$$

$$\overset{\text{nur } a_{11} \neq 0}{=} a_{11} \; det \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Folgerung aus Satz 18/Lemma 20

Wiederh. — Satz 18 *Ist A ausgeartet, so ist $det(A) = 0$*

Wiederh. — Lemma 20(Zweite Aussage) *Ist $A \in Mat(n, n)$ nichtausgeartet, so ist $det(A) \neq 0$*

Folgerung. Für jede $(n \times n)-$Matrix gilt:
A ist ausgeartet $\Longleftrightarrow det(A) = 0$

Satz 21 *(D1)' Determinantenabbildung ist linear in den Spalten:*

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j}+b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj}+b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \lambda a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \lambda a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

Beweis: Wir benutzen die Laplace-Spaltenentwicklung

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

Nach Multiplikation der $j-$ten Spalte mit λ wird jedes a_{ij} mit λ multipliziert. $det(A_{ij}^{Str})$ bleibt unverändert. Dann wird die Determinante mit λ multipliziert. Ähnlich mit der Addition, $\square$

Wiederholung – Def. *Sei A eine $(m \times n)$-Matrix,*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ *Die* *transponierte* *Matrix* A^t *ist die folgende*

$(n \times m)$ *Matrix:* $A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, *d.h. an der Stelle* (i,j) *von* A^t *steht das* (j,i)*-Element von* A.

Bsp. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bemerkung *Für quadratischen Matrizen ist transponieren gleichbedeutend mit einer Spiegelung an der Hauptdiagonalen.*

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{M}^\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 11 & 21 & 31 \\ 12 & 22 & 32 \\ 13 & 23 & 33 \end{bmatrix}$$

Bemerkung $(A^t)^t = A$

Bemerkung Die $i-$te Spalte von A^t ist die $i-$te Zeile von A; die $j-$te Zeile von A^t ist die $j-$te Spalte von A (falls $A \in Mat(m,n)$, dann $i = 1, ..., m$ und $j = 1, ..., n$).

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{M}^\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 11 & 21 & 31 \\ 12 & 22 & 32 \\ 13 & 23 & 33 \end{bmatrix}$$

Satz 22 *Sei A eine* $(n \times n)$ *Matrix. Dann gilt:* $det(A) = det(A^t)$.

Beweis. Wir definieren die folgende Abbildung $\widetilde{det} : Mat(n, n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\widetilde{det}(A) := det(A^t)$. Wir zeigen: die Abbildung ist die Determinantenabbildung.Z.z.: Die Abbildung erfüllt Eigenschaften (D1), (D2), (D3):
(D1), weil die Abbildung det linear in den Spalten ist (Satz 21, (D1)'),
$D2$, weil eine Matrix deren zwei Spalten gleich sind, ausgeartet ist (Satz 15). Und deswegen ist die Determinante gleich Null (Satz 18).
$D3$, weil $Id^t = Id$.
Nach Lemma 20 (Eindeutigkeit) ist $\widetilde{det} = det$. □

Folgerung *Die Determinantenabbildung hat die folgenden Eigenschaften für jedes* $A \in Mat(n, n)$

(D5)' *nach der elementaren Spaltenumformung (S3) (zwei Spalten vertauschen) wird die Detemninante mit* (-1) *multipliziert,*

(D6)' *die elementare Spaltenumformung (S1) (*λ*- faches einer Spalte zur einer anderen addieren) ändert die Determinante nicht.*

(D7)' *(Laplace-Zeilenentwicklungssatz)* $det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+i} a_{ji} det(A_{ji}^{Str})$,

Beweis: Zuerst transponieren, dann Eigenschaften $(D5)$, $(D6)$, $(D3)$, $(D7)$ anwenden, □

Die Determinante einer Dreiecksmatrix

Eine schöne Anwendung der Entwicklungsformel ist:

Lemma 21 Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & * & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1\,n-1} & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ eine obere Dreiecksmatrix. Dann gilt $det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$.

Beweis. Wir verwenden Induktion nach n.

- IA: Für $n = 1$ ist alles klar.
- IV: Die Aussage gelte für $(n-1 \times n-1)-$Matrizen.
- IS: $n-1 \to n$. Für $n > 1$ *entwickeln* wir $det(A)$ *nach der letzten Zeile* (also $j = n$ in (D7)') und erhalten $det(A) = a_{nn} \cdot det(A^{str}_{nn})$ (weil außer a_{nn} alle Einträge in der letzten Zeile gleich 0 sind). Dabei ist A^{Str}_{nn} eine $((n-1) \times (n-1))$-Matrix in Dreiecksform, die nach Induktionsvoraussetzung die Determinante $a_{11} \cdots a_{n-1\,n-1}$ hat, □

Bemerkung. Ein entsprechendes Resultat gilt für untere Dreiecksmatrizen, weil nach Transponieren einer unteren Dreiecksmatriz bekommen wir eine obere Dreiecksmatrix

Effiziente Berechnung von Determinanten (Empfehlungen)

Für (2×2) - Matrizen: mnemonische Regel.

Für (3×3)- Matrizen: mnemonische Regel oder Laplace-Entwicklung.

Für größere n: Durch eine Kombination der Verfahren

- Elementare Zeilen- bzw. Spaltentransformationen. In diesem Fall protokollieren wir
  1. die Faktoren $\lambda_1, ..., \lambda_s$ der verwendeten Multiplikationen von Spalten, wir müssen später durch diesen Zahlen dividieren
  2. die Anzahl t der Spaltenvertauschungen; jede Spaltenvertauschung ändert das Vorzeichen
- Entwicklung nach Zeilen bzw. Spalten.

formen wir die zu berechnende Determinante solange in eine Summe von Determinantentermen um, bis für die verbleibenden Determinanten der Wert sofort ablesbar ist (wie bei Dreiecksmatrizen) oder aber leicht berechenbar ist (wie bei 2×2- bzw. $3 \times 3-$Matrizen). Danach berücksichtigen wir die Zahlen λ und t Vorzeichenänderungen.

Beispiel Determinantenberechnung

Zu berechnen ist die Determinante der 3×3-Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Mit $v'(i,j)$, $m'(i,\lambda)$, $a'(i,j,\alpha)$ bezeichnen wir die Spaltentransformationen "Vertauschen von i-ter und j-ter Spalte", "Multiplikation der i-ten Spalte mit $\lambda \neq 0$" bzw. "Addition des α-fachen der i-ten Spalte zur j-ten Spalte". Dann gilt

1. $m'(1, \frac{1}{2})$ liefert $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
2. $a'(1,2,-3)$ und $a'(1,3,-5)$ liefern $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & -7 & -12 \end{pmatrix}$.
3. $a'(2,1,1), a'(2,3,-1/2)$ und $m'(2,-1)$ liefern dann $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

Wir haben eine Unterdiagonalmatrix bekommen; deren Determinante ist $1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$.

Protokolle. Keine Spaltenvertauschungen. Zwei Spaltenmultiplikationen mit den Faktoren $1/2$ bzw. -1. Die Determinante von A ist deswegen $2 \cdot \frac{1}{1/2} \cdot \frac{1}{-1} = -4$.

Noch ein Bsp

Bsp. $$det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 12 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{Z.1 und Z.2} \\ \text{vertauschen}}}{=} -det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 12 \end{pmatrix} =$$

$$\overset{\substack{\text{Z.3 - Z.1} \\ \text{Z.4- 2 Z.1}}}{=} -det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{Z.4 - 3 Z.3}}{=}$$

$$-det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{Dreiecksform}}{=} -2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = -4$$

Bsp $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

Wir berechnen die Determinante mit dem Entwicklungssatz, Entwicklung nach Zeile 3:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$(-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot (-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$(-1)^{3+3} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{3+4} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$0+1(0+12+2-1+4-0)+2(0-8+6-3+12)-2(-3-2+18-9+3+4) =$$

$$17 + 14 - 22 = 9$$

Anwendung der Determinante: Charakterisierung der linearen Unabhängigkeit

Folgerungen aus Satz 15/Satz 18/Lemma 20 *Sei* $\left(a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, ..., a_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}\right)$ *ein* $n-$*Tupel von Vektoren des* $\mathbb{R}^n$. *Es gilt:*

$(a_1, ..., a_n)$ *ist genau dann linear unabhängig, wenn* $\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \neq 0$ *ist.*

Beweis Nach Satz 15 ist $(a_1, ..., a_n)$ genau dann linear abhängig, wenn die Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ausgeartet ist;

Nach Satz 18/Lemma 20 ist die Matrix genau dann ausgeartet, wenn $\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = 0$, $\square$

Die Cramersche Regel

Satz 23 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in Mat(n,n)$ *sei invertierbar,* $b \in \mathbb{R}^n$*. Wir betrachten das lineare Gleichungssystem* $\left\{ \begin{array}{cccc} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & \dots & +a_{nn}x_n & = b_n \end{array} \right.$ *(in Matrixform:* $Ax = b$*). Dann ist die (nach Folg. 3 aus den Satz 15 eindeutige) Lösung* $x \in \mathbb{R}^n$ *gegeben durch*

$$x_j := \frac{det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}{det(A)} \qquad (*)$$

Die Matrix, deren Determinante im Zähler steht, ist wie folgt definiert: Wir haben die j-te Spalte in A mit b ersetzt.

Für den Beweis der Cramerschen Regel führen wir die folgenden Bezeichnungen ein: Für Vektoren $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir die Matrix, deren Spalten die Vektoren $a_1, ..., a_n$ sind (für jedes i ist die $i-$te Spalte der Vektor a_i), mit $[a_1, ..., a_n]$.

Die Cramersche Regel mit der neuen Bezeichnung.

Satz 23 Sei $A \cdot x = b$ ein lineares Gleichungssystem mit invertierbarer Matrix $A = [a_1, ..., a_n]$.

Der Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ der eindeutig bestimmten Lösung des Systems ist dann gegeben durch

$$x_1 = \frac{\det[b, a_2, ..., a_n]}{\det(A)}, \ldots, x_i = \frac{\det[a_1, \ldots, b, \ldots, a_n]}{\det(A)}, \ldots, x_n = \frac{\det[a_1, \ldots, a_{n-1}, b]}{\det(A)}.$$

(In der Formel für x_i steht b in der i-ten Spalte.)

Bemerkenswert ist die Einfachheit des Beweises (dieser folgt unmittelbar!).

Beweis der Cramerschen Regel

Beweis. Die Gleichung

$$x_1 \cdot a_1 + \cdots + x_i \cdot a_i + \cdots + x_n \cdot a_n = b$$

können wir in der Form

$$x_1 \cdot a_1 + \cdots + 1 \cdot (x_i \cdot a_i - b) + \cdots + x_n \cdot a_n = 0$$

schreiben. Die Vektoren

$$a_1, \ldots, x_i \cdot a_i - b, \ldots, a_n$$

sind daher linear abhängig und es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \det[a_1, \ldots, x_i \cdot a_i - b, \ldots, a_n] \\ &= x_i \cdot \det[a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n] - \det[a_1, \ldots, b, \ldots, a_n], \end{aligned}$$

weswegen $x_i = \frac{\det[a_1, \ldots, b, \ldots, a_n]}{\det(A)}$ wie wir behauptet haben, □

Bsp

$$1\,x_1 + 2\,x_2 = 3$$
$$4\,x_1 + 5\,x_2 = 6$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{3}{-3} = -1 \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{-3} = 2$$

Aufgabe Verwende die Cramersche Regel, um das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ zu lösen. Dabei seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Nach der Regel von Sarrus ist

$$\begin{aligned}\det A &= 1 \cdot (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \\ &= -4 + 6 + 12 + 9 - 2 - 16 \\ &= 5.\end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}
\det\left(\vec{b}\,\middle|\,\begin{matrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{matrix}\right) &= \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\
&= 1\cdot(-1)\cdot 4 + 2\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 0\cdot 2 - 3\cdot(-1)\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 0\cdot 4 \\
&= -4 + 2 + 3 - 2 \\
&= -1, \\
\det\left(\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31}\end{matrix}\,\middle|\,\vec{b}\,\middle|\,\begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33}\end{matrix}\right) &= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\
&= 1\cdot 0\cdot 4 + 1\cdot 1\cdot 3 + 3\cdot 2\cdot 1 - 3\cdot 0\cdot 3 - 1\cdot 2\cdot 4 - 1\cdot 1\cdot 1 \\
&= 3 + 6 - 8 - 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det\left(\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32}\end{matrix}\,\middle|\,\vec{b}\right) &= \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 1\cdot(-1)\cdot 1 + 2\cdot 0\cdot 3 + 1\cdot 2\cdot 2 - 1\cdot(-1)\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 0\cdot 2
\end{aligned}$$

Als Lösung ergibt sich also

$$x = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Anwendung der Determinante: eine Formel für die inverse Matrix

Def. *Sei $A \in Mat(n,n)$. Die Matrix deren (i,j)-Eintrag gleich $(-1)^{i+j} det(A_{ji}^{Str})$ heißt die adjunkte Matrix (oder Komatrix) und wird mit $Co(A)$ bezeichnet.*

Zu beachten: Um die adjunkte Matrix zu bekommen, ersetzen wir zuerst den (i,j) - Eintrag durch $(-1)^{i+j} det(A_{ij}^{Str})$ und transponieren danach noch.

Bsp. Sei $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Dann ist $Co(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Bsp. Für

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

haben wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{adj}(A) &= \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} b & c \\ h & i \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} a & c \\ g & i \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} a & b \\ g & h \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} ei - hf & fg - di & dh - eg \\ ch - bi & ai - cg & bg - ah \\ bf - ce & cd - af & ae - bd \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} ei - hf & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Satz 24 (Leibnitz – Laplace– Cramer – Formel für die inverse Matrix)
$A \in Mat(n,n)$ sei nichtausgeartet. Dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$.

Bemerkung. Nach Lemma 20 ist $det(A) \neq 0$, da A nichtausgeartet ist.
Beweis. Z.z.: $Co(A)\,A = det(A)Id$. Den (j,i)-Eintrag von $Co(A)$ bezeichnen wir mit $c_{ji} \stackrel{\text{def}}{:=} (-1)^{i+j} det(A_{ij}^{Str})$. Nach Definition der Multiplikation von Matrizen ist der $(j,k)-$ Eintrag von $Co(A)\,A$ gleich

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ji} a_{ik} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik} det(A_{ij}^{Str}). \qquad (*)$$

Fur $k = j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung; also sind die Diagonalelemente von $A\,Co(A)$ gleich $det(A)$.
Für $k \neq j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung der Matrix $\tilde{A}$, wobei $\tilde{A}$ aus A entsteht, indem man die j-te Spalte von A mit der $k-$ten Spalte ersetzt.
Da $\tilde{A}$ zwei gleiche Spalten hat, ist $det(\tilde{A}) = 0$ ((D2)').
Also sind die Elemente außerhalb der Diagonalen von A gleich 0. Also $Co(A)\,A = det(A)$. $\square$

Bsp (Vergl. Hausaufgabe 3a Blatt 7).

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{det} & -\frac{b}{det} \\ -\frac{c}{det} & \frac{a}{det} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}.$$

Noch ein Bsp

- $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ Zuerst bestimmen wir die Determinante: $\det(A) = 30$

Und dann die 9 Ko-Faktoren: (Beachte: schachbrettartiger Vorzeichenwechsel!)

$$C_{11} = \left|\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right| = 4 \qquad C_{12} = -\left|\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right| = -2 \qquad C_{13} = \left|\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right| = 6$$

$$C_{21} = -\left|\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right| = 8 \qquad C_{22} = \left|\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right| = -4 \qquad C_{23} = -\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right| = -2$$

$$C_{33} = \left|\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right| = -2 \qquad C_{32} = -\left|\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\right| = 16 \qquad C_{33} = \left|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\right| = -3$$

Also ist die inverse Matrix:

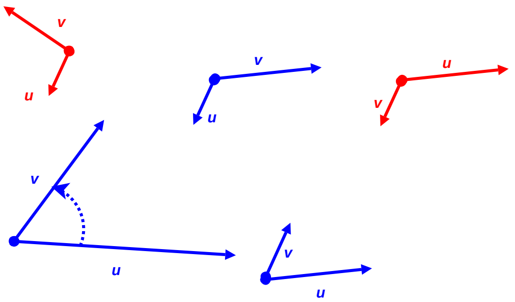
$$M^{-1} = \frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 8 & -4 & -2 \\ -2 & 16 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{15} & \frac{-1}{15} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{15} & \frac{-2}{15} & \frac{-1}{15} \\ \frac{-1}{15} & \frac{8}{15} & \frac{-1}{10} \end{pmatrix}$$

Positive Basen in der Ebene

Wir betrachten eine Basis ($\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AC}$) in der geometrischen Ebene.

Eine Basis ist positiv oder positiv-orientiert, falls wir die Halbgerade AB gegen den Uhrzeigersinn um einen Winkel $< 180^o$ drehen müssen, um die Halbgerade AC zu erreichen, sonst ist sie negativ.

Bemerkung. Die Definition hat nur in der geometrischen Ebene (also nicht in einem abstrakten Vektorraum) Sinn. Wir werden später eine Orientierung eines abstrakten Vektorraums einführen



Determinante von $2 \times 2-$Matrizen als Flächeninhalt

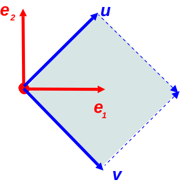
Man betrachte eine positive Basis (e_1, e_2) in der Ebene, s.d. die Vektoren e_1, e_2 die Seiten eines Quadrats mit Seitenlänge 1 bilden. (Wichtig ist nur, dass der Flächenenthalt des aufgepannten Parallelogramms gleich 1 ist).

Wir definieren die Funktion $det_{geo} : Mat(2,2) \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$\left|det_{\mathrm{geo}}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}\right| :=$ Flächeninhalt des Parallelogramms, das von $u_1 e_1 + u_2 e_2,\ \ v_1 e_1 + v_2 e_2$ aufgespannt wird.

$$\text{Vorzeichen}\left(det_{\mathrm{geo}}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} + & \text{falls } (u, v) \text{ eine positive Basis ist} \\ - & \text{sonst} \end{cases}$$

Auf dem Bild: $u = e_1 + e_2$, $v = e_1 - e_2$, also $det_{geo}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 = det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$



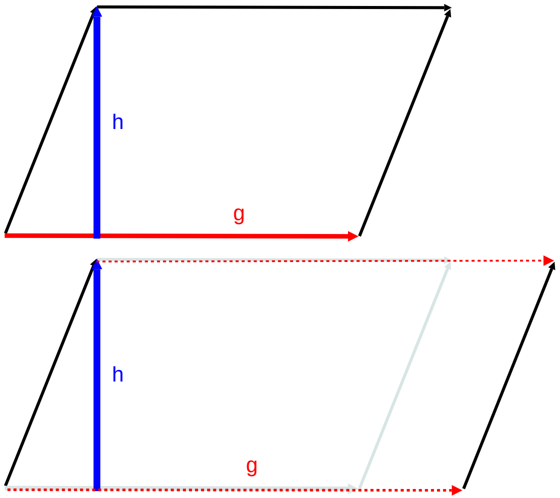
Behauptung: $det_{geo} = det$.
In Worten: *Die Determinante der Matrix A ist der orientierte Flächeninthalt desjenigen Parallelogramms, dessen Koordianten der Seiten die Zeilen der Matrix sind*

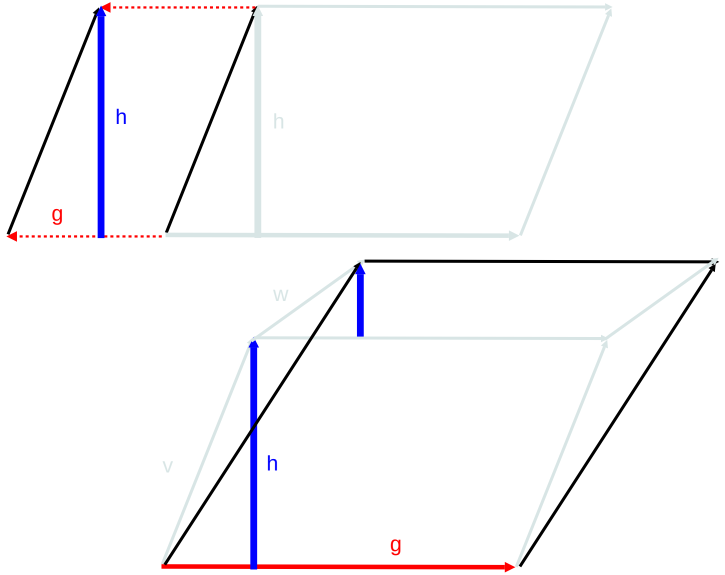
Wiederholung — Def. : Determinante ist eine Abbilldung, die (D1, D2, D3) erfüllt; wir müssen deswegen (D1, D2, D3) für det_{geo} nachweisen.

Wir müssen prüfen, dass der orientierte Flächeninhalt die Eigenschaften (D1) – (D3) hat. Wir wissen (Schulgeomentrie), dass der Flächeninhalt gleich Grundseite g mal Höhe h ist.

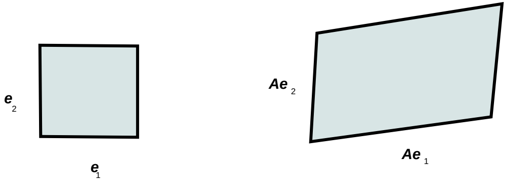
(D1) (=Linearität) Wenn wir $\vec{u}$ mit λ multiplizieren, wird dessen Länge auch mit λ multipliziert, die Höhe bleibt dieselbe. Also wird der Flächeninhalt mit λ multipliziert. Falls λ negativ ist, wird zusätzlich die Orientierung der Basis $(\vec{u}, \vec{v})$ geändert.

Wenn wir $\vec{v}$ mit $\vec{v} + \vec{w}$ ersetzen, werden wir den Flächeninhalt um den (orientierten) Flächeninhalt des Parallelogramms mit Seiten $\vec{u}, \vec{w}$ vergrößern bzw. verkleinern.


h
g
h
g


h
h
g
w
v
h
g

(D2) Falls $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig sind, ist die Höhe gleich 0 und deswegen ist der Flächeninhalt gleich 0.
(D3) Flächeninhalt des Quadrats mit Seite 1 ist 1

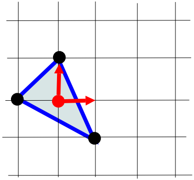


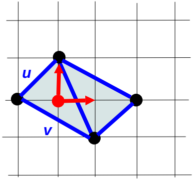
Da die Determinante der Matrix gleich die Determinante der transponierten Matrix ist (Satz 22), kann man die Determinante als orientierten Flächeninhalt desjenigen Parallelogramms auffassen, dessen Seiten die Spalten der Matrix sind. Da die Spalten der Matrix genau die Bilder der Basisvektoren (unter der Abbildung f_A) sind, ist der Flächeninhalt des Bildes eines Quadrats der Seitenlänge 1 gerade $det(A)$. Also multipliziert die Abbildung f_A alle Flächeninhalte mit $\det A$.

Anwendung: Flächeninhalte berechnen

Beispielaufgabe *Finde den Flächeninhalt des Dreiecks mit Ecken* $\binom{-1}{0}, \binom{0}{1}$, $C = \binom{1}{-1}$.

Lösung Das Parallelogramm besteht aus zwei kongruenten Dreiecken,





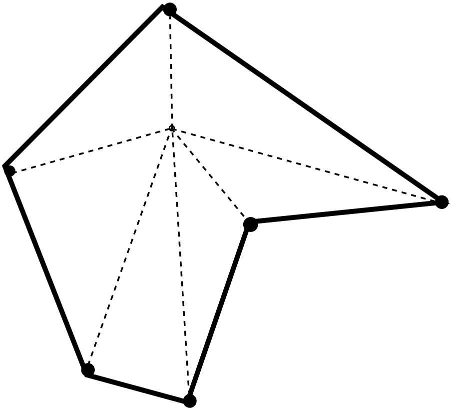
deswegen ist der Flächeninhalt

$= \frac{1}{2}\left|det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}\right|$

$= \frac{1}{2}\left|det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right| = \frac{3}{2}.$

Anwendung: Flächeninhalt von Polygon

Da man jedes Polygon in Dreiecke zerlegen kann,



kann man mit Hilfe der Determinante den Flächeninhalt jedes Polygons ausrechnen.