Abschnitt: Diagonalisierung von Endomorphismen

Wiederholung: Endomorphismus von V ist eine lineare Abbildung von V nach V.

Frage: f sei ein Endomorphismus. In welcher Basis ist die darstellende Matrix von f „einfach"?

Bemerkung. Ähnliche Frage über lineare Abbildungen $f : V \to U$ haben wir in Vorl. 13 gelöst: wir haben bewiesen, dass wir Basen in V und U so wählen können, dass die darstellende Matrix der Abbildung wie folgt ist:

$$\begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ \hline & & & & \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow \text{k -te Zeile} \\ \\ \end{array}$$

Wenn wir ENDOMORPHISMEN betrachten, also wenn $V = U$ ist, haben wir leider nicht die Möglichkeit, die Basen in V und U separat zu wählen (weil $V = U$ ist). Daher ist dieses neue Problem schwieriger und die Antwort ist interessanter.

Wiederholung — Folgerung aus Satz 25: Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Die darstellende Matrix von f bzgl. der Basen $B_V = (v_1, ..., v_n)$ (in V) und $B_U = (u_1, ..., u_m)$ (in U) sei $A \in Mat(m, n)$. Seien $B'_V = (v'_1, .., v'_n)$, $B'_U = (u'_1, ..., u'_m)$ andere Basen in V bzw. U, T_U, T_V die Transformationsmatrizen, d.h. der Koordinatenvektor von v'_i in der Basis $(v_1, ..., v_n)$ ist die $i-$te Spalte von A. Dann gilt:
Die darstellende Matrix von f bzgl. der Basen B'_V, B'_U ist $A' := T_U^{-1} A T_V$.

Folgerung: Falls $U = V$ ist $T_U = T_V$, also wird die darstellende Matrix von $f : V \to V$ bei einem Basiswechsel so verändert:
$A' := B^{-1}AB$, wobei $B = T_V \in Mat(n, n)$.

Frage umformuliert: Für $A \in Mat(n, n)$, auf welche einfachste Form kann man A mit Hilfe von $A \mapsto B^{-1}AB$ bringen, wobei $B \in Mat(n, n)$ eine nichtausgeartete Matrix ist?

Wir werden die Frage in den nächsten zwei-drei Vorlesungen (teilweise) beantworten.

Def. Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n,n)$ heißen ähnlich, falls es ein nichtausgeartetes $B \in Mat(n,n)$ gibt, sodass $A' = B^{-1}AB$.
Bemerkung. Ähnliche Matrizen haben nichts mit Ähnlichkeitstransformationen aus der Schulgeometrie zu tun
Bemerkung. Wie wir in der Folgerung oben gezeigt haben, wird, wenn wir die Basis in V ändern, die darstellende Matrix der Abbildung wie folgt geändert: $A' = B^{-1}AB$, wobei B die Transformationsmatrix ist. Also sind die darstellende Matrizen einer linearen Abbildung bzgl. verschiedener Basen ähnlich.

Ferner gilt: wenn $A' = B^{-1}AB$, dann gibt es eine Basis sodass die darstellende Matrix der Abbildung f_A gleich A' ist. In der Tat, nach der Folgerung oben genügt es zu zeigen, dass eine neue Basis existiert, sodass die Transformationsmatrix von der Standardbasis zur neuen Basis gleich B ist.

Solch eine Basis existiert (und ist einfach zu konstruieren): die Vektoren sind die Spalten von B. Nach Definition (siehe Vorl. 13) ist die Transformationsmatrix von der Standardbasis zur neuen Basis gleich B, wie wir behauptet haben.

Wie kann man verstehen, ob zwei gegebene Matrizen A und A' ähnlich sind?
Man kann das direkt nach der Definition machen (rechnerisch sehr aufwendig; wir werden heute viel bessere Methoden kennenlernen).
$X^{-1}AX = A' \iff AX - XA' = \mathbf{0}$.
Das ist ein lineares Gleichungssystem aus n^2 Gleichungen für die unbekannten Einträge von X (also n^2 Unbekannte); die Koeffizienten sind von A und A' abgeleitet. Man löst es z.B. mit dem Gauss-Algorithmus. Wenn eine Lösung X existiert, sodass X nichtausgeartet ist, dann sind die Matrizen ähnlich; sonst nicht.

Charakteristisches Polynom:

Methoden, um die Frage oben zu beantworten: Die geometrischen und algebraischen Strukturen untersuchen, die für zwei ähnliche Matrizen gleich sind.

Def. Ein Polynom mit Koeffizienten $a_m, ..., a_0$ ist die Funktion $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form $f(x) = a_m x^m + .. + a_0$.
Als Grad des Polynoms wird der höchste Exponent n bezeichnet, für den der Koeffizient a_n des Monoms $a_n x^n$ nicht Null ist. Dieser Koeffizient heißt Leitkoeffizient. (Die übliche Schreibweise deg(P) für den Grad des Polynoms P ist vom englischen Begriff degree abgeleitet; ich werde auch $Grad(f)$ benutzen.)

Def. *Sei A eine $n \times n$-Matrix. Das charakteristische Polynom der Matrix A ist das Polynom $\aleph_A := det(A - t \cdot Id)$.*

Bsp. $\aleph_{Id} = det(Id - tId) = det \begin{pmatrix} 1-t & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^n.$

Bsp. $\aleph_{\mathbf{0}} = det(\mathbf{0} - tId) = det \begin{pmatrix} -t & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -t \end{pmatrix} = (-t)^n.$

Bsp.
$\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = det \begin{pmatrix} -2-t & -2 \\ 6 & 5-t \end{pmatrix} = (-2-t)(5-t) + 2 \cdot 6 = t^2 - 3t + 2.$

Bsp

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix} \\
\det(\mathbf{A} - \lambda \, \mathrm{Id}) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 1 \\ 3 & 1-\lambda & 3 \\ -5 & 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda) * (1-\lambda) * (-4-\lambda) + (-3) * 3 * (-5) + 1 * 3 * 2 \\
&\quad -(-5) * (1-\lambda) * 1 - 2 * 3 * (2-\lambda) - (-4-\lambda) * 3 * (-3) \\
&= (2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2) * (-4-\lambda) + 45 + 6
\end{aligned}
$$

Rechnen Sie bitte $\aleph_C$ selbst aus:

$$C := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(C - \lambda \mathrm{Id}) = det(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}) =$$

$$\det(\begin{pmatrix} (-\lambda - 1) & 1 & 1 \\ 0 & (1 - \lambda) & 3 \\ 1 & 0 & (2 - \lambda) \end{pmatrix}) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda$$

Lemma 24. Sei $A \in Mat(n,n)$ nichtausgeartet. Dann gilt: $det(A^{-1}) = det(A)^{-1}$.

Beweis. $1 = det(Id) = det(A^{-1}A) \overset{\text{Satz 19}}{=} det(A^{-1}) \cdot \det(A)$.
Also $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$. $\square$

Satz 28 *Sind die Matrizen A und A′ ähnlich, so sind deren charakteristische Polynome gleich:* $\aleph_A = \aleph_{A'}$.

Beweis. Nach Definition ist $A' = B^{-1}AB$ (für irgendeine nichtausgeartete Matrix B). Dann ist

$$\aleph_{A'} = det(B^{-1}AB - t \cdot Id) = det(B^{-1}AB - t \cdot B^{-1}IdB)$$
$$\overset{\text{Linearität}}{=} det(B^{-1}(A - t \cdot Id)B)$$
$$\overset{\text{Satz 19}}{=} det(B^{-1})det(A - t \cdot Id)det(B) =$$
$$\textbf{[} \text{ weil } det(B^{-1})det(B) = 1 \text{ nach Lemma 24 } \textbf{]}$$
$$= det(A - t \cdot Id) = \aleph_A.$$
$\square$

Folgerung *Sind die Matrizen A und A′ ähnlich, so sind die Nullstellen von* $\aleph_A$ *auch Nullstellen von* $\aleph_{A'}$ *und umgekehrt*

Lemma 25 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0$ mit $a_n \neq 0$) und es gilt $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$, $a_0 = det(A)$.*

Beweis. Zuerst die folgende Aussage:
$\aleph_A = (a_{11}-t)(a_{22}-t)\dots(a_{nn}-t) + Q$, wobei Q ein Polynom vom Grad $\leq n-2$ ist. Beweis durch Induktion nach n:
I.A. $n = 1$: Dann ist $A = (a_{11})$ und $\aleph_A = det(a_{11}-t) = a_{11}-t$.
I.V. Angenommen die Aussage ist richtig für $(n-1)\times(n-1)$-Matrizen.
I.S. $\aleph_A = det\begin{pmatrix} a_{11}-t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-t & a_{23} & \dots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn}-t \end{pmatrix}$. Entwicklung nach der 1. Spalte liefert

$$(a_{11}-t)det\begin{pmatrix} a_{22}-t & a_{23} & \dots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn}-t \end{pmatrix} + \underbrace{\sum_{j=2}^{n}(-1)^{j+1}a_{j1}det\left((A-t\cdot Id)^{Str}_{j1}\right)}_{\substack{\text{ist ein Polynom vom Grad } \leq n-2 \\ \text{Erklärung auf der nächsten Seite}}} =$$

$$(a_{11}-t)\aleph_{A^{Str}_{11}} + Q_1 \overset{I.V.}{=} (a_{11}-t)\left((a_{22}-t)\dots(a_{nn}-t) + \underbrace{Q_2}_{\text{vom Grad } \leq n-3}\right) + Q_1 =$$

$(a_{11}-t)(a_{22}-t)\dots(a_{nn}-t) + \underbrace{(a_{11}-t)Q_2 + Q_1}_{Q \quad Grad(Q)\leq n-2}$. Die Aussage ist bewiesen.

Erklärung warum für $j \geq 2$ die Summanten $(-1)^{j+1} a_{j1} det\left((A - t \cdot Id)^{Str}_{j1}\right)$ den Grad höchstens $n-2$ haben. Sei A eine quadratische $n \times n$-Matrix deren Einträge Zahlen sind, oder Ausdrücke der Form $\pm t + \alpha$ (also, Polynomen 1stes Grades mit Leitkoeffizient ± 1), wobei höhstens k Einträge die Form $\pm t + \alpha$ haben. Dann gilt: $\det(A)$ ist ein Polynom vom Grad $\leq k$.

Induktionsbeweis. Induktion über n.

IA, wenn $n = 1$, ist offensichtlich.

IV. Die Aussage sei erfüllt für $(n-1) \times (n-1)-$Matrizen (und für jedes k).

IS. Wir sollen jetzt sie für $n \times n-$Matrizen zeigen.

Entwicklung nach der 1. Spalte liefert

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} det(A^{Str}_{1j}).$$

Einige Faktoren a_{1j} können die Form $\pm t + \alpha$ haben; einige A^{Str}_{1j} können auch Einträge der Form $\pm t + \alpha$ haben. Wenn a_{1j} eine Zahl ist, ist Grad von $det(A^{Str}_{1j})$ höchstens k nach Induktionsvoraussetzung. Wenn a_{1j} die Form $\pm t + \alpha$ hat, hat A^{Str}_{1j} höchstens $k-1$ Einträge der Form $\pm t + \alpha$; deswegen ist nach IV Grad von $det(A^{Str}_{1j})$ höchstes $k-1$ und daher $Grad(a_{1j} det(A^{Str}_{1j})) = Grad((\pm t + \alpha) det(A^{Str}_{1j})) \leq k$.

Wir sehen dass alle Summanten $(-1)^{1+j} a_{1j} det(A^{Str}_{1j})$ Grad höchstens k haben; deswegen ist $Grad(det(A)) \leq k$. □

Nach obiger Aussage ist
$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + \underbrace{Q}_{\text{vom Grad } \leq n-2} = (-t)^n +$
$a_{11}(-t)^{n-1} + a_{22}(-t)^{n-1} + ... + a_{nn}(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme vom Grad } \leq n-2} =$
$(-t)^n + (a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme vom Grad } \leq n-2}$. Also,
$a_n = (-1)^n$, und $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$ wie wir behauptet haben.

Wir müssen noch zeigen, dass $a_0 = det(A)$.
Da $a_0 = a_n \cdot 0^n + ... + a_1 \cdot 0 + a_0 = \aleph_A(0)$ ist, und da
$\aleph_A(0) \overset{\text{Def.}}{=} det(A - 0 \cdot Id) = det(A)$ ist, ist $a_0 = det(A)$. □

Def. *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix. $tr(A) := a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$ heißt Spur (auf Englisch: trace, daher die Bezeichnung) von A.*

Wichtige Bemerkung. Da $(-1)^{n-1}tr(A)$ nach Lemma 25 ein Koeffizient des charakteristischen Polynoms ist und charakteristische Polynome von ähnlichen Matrizen nach Satz 28 gleich sind, haben ähnliche Matrizen gleiche Spuren.

Philosophische Bemerkung: Wicht. Bemerkung sagt uns, dass $tr(B^{-1}AB) = tr(A)$ ist. Probieren sie dies direkt (also rechnerisch) zu zeigen! Es ist sehr kompliziert, fast unmöglich.

Man kann die Wicht. Bemerkung anwenden um zu beweisen, dass zwei Matrizen NICHT ähnlich sind.

Bsp. Sind die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ähnlich? Nein! Sie haben verschiedene Spuren. Ähnliche Matrizen müssen aber nach Satz 28 und Lemma 25 gleiche Spuren haben.

Bsp. Sind die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ ähnlich? Nein! Sie haben verschiedene Determinanten und die Determinante ist auch ein Koeffizient des charakteristischen Polynoms (nähmlich a_0, siehe Lemma 25).

Def. *Es sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt ein Eigenwert, falls es ein $v \in V$, $v \neq \vec{0}$, gibt, s.d. $f(v) = \lambda v$. Ist λ ein Eigenwert, so heißt die Menge $\{v \in V \quad s.d. \ f(v) = \lambda v \ \}$ der Eigenraum zum Eigenwert λ und wird mit Eig_λ bezeichnet.*

Äquivalente Definition: Sei $f = f_A$. Dann gilt: $Eig_\lambda := Kern_{A-\lambda \cdot Id}$. (Daraus folgt insbesondere, dass Eig_λ ein Untervektorraum ist, weil nach Satz 12(b) der Kern einer linearen Abbildung ein Untervektorraum ist.)

Def. Eigenvektor zum Eigenwert λ ist ein Element von Eig_λ welches nicht $\vec{0}$ ist.

Bsp. Jedes $v \neq \vec{0}$ ist Eigenvektor von Id mit Eigenwert 1, weil $(Id - 1 \cdot Id)v = \vec{0}$.

Bsp.

$$x = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$ Ist Eigenvektor von $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

mit Eigenwert 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \\ 0 \cdot (-2) + (-2) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bsp. Wir betrachten die Diagonalmatrix $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$.

Charaktersiches Polynom von A ist

$\aleph_A = det(A - t \cdot Id) = det \begin{pmatrix} 1-t & & \\ & 2-t & \\ & & 3-t \end{pmatrix} = (1-t)(2-t)(3-t)$.

Ich zeige, dass 2 ein Eigenwert von A ist. Analog kann man zeigen, dass 1 und 3 auch Eigenwerte sind. (Aus Satz 29 wird folgen, dass es keine weitere Eigenwerte gibt. Satz 29 wird ausserdem eine mächtige Methode geben, die Eigenwerte auszurechnen. Jetzt machen wir es nach Definition).

Um zu zeigen, dass 2 ein Eigenwert von A ist, muss ich zeigen, dass $Kern(A - 2 \cdot Id) \neq \{\vec{0}\}$ ist. Aber

$(A - 2 \cdot Id) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$ - $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

Weil $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$, ist $Kern(A - 2 \cdot Id) \neq \{\vec{0}\}$ wie behauptet. Der Vektor $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A (mit Eigenwert 2). Auch jeder Vektor $\lambda \cdot e_2$ mit $\lambda \neq 0$ ist ein Eigenvektor von A:

$(A - 2 \cdot Id)(\lambda e_2) = \lambda(A - 2 \cdot Id)e_2 = \lambda\vec{0} = \vec{0}$.

(Für $\lambda = 0$ ist $\lambda \cdot e_2$ **KEIN** Eingenvektor nach Definition.)

Wir berechnen jetzt den Eigenraum zum Eigenwert 2.
Außer Vektoren der Form $\lambda \cdot e_2$ gibt es keine weitere Eigenvektoren mit Eigenwert 2:
ist $(A - 2 \cdot Id)x = \vec{0}$, so ist
$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, also ist $x = z = 0$.
Dann ist: $Eig_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

Satz 29 *Es sei* A *die Matrix des Endomorphismus* $f : V \to V$. *Dann gilt:* λ *ist g.d. ein Eigenwert von* f, *wenn* λ *eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms* $\aleph_A$ *ist.*
Bemerkung Obwohl die darstellende Matrix von f von der Wahl der Basis abhängt, hängen die Nullstellen von $\aleph_A$ nicht von der Wahl der Basis ab (nach Folgerung oben).

Wiederholung: Wicht. Anw. der ersten Dimensionsformel – siehe Vorl. 12 *A sei eine* $n \times n$ *Matrix. Es gilt:*
$det(A) = 0 \iff$ *es gibt ein* $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$, *mit* $Av = \vec{0}$.
Beweis von Satz 29. Wir betrachten die lineare Abbildung $f_{A-\lambda Id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f_{A-\lambda Id}(x) := (A - \lambda Id)x = Ax - \lambda x$. Deren Matrix ist $A - \lambda Id$. Nach Wicht. Anw. der 1. Dimformel ist $det(A - \lambda Id) = 0$ g.d.w. es ein $v \neq \vec{0}$ gibt mit $\vec{0} = (A - \lambda Id)v = Av - \lambda v = f(v) - \lambda v$. Also $\aleph_A(\lambda) = 0$ g.d.w. λ ein Eigenwert von f ist. $\square$

Anwendung von Satz 29.

Bsp. Wir betrachten die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$.

Charaktersiches Polynom von A ist

$\aleph_A = det(A - t \cdot Id) = det \begin{pmatrix} 1-t & & \\ & 2-t & \\ & & 3-t \end{pmatrix} = (1-t)(2-t)(3-t)$.

Die Nullstellen von $\aleph_A$ sind $1, 2, 3$ (wenn wir $t = 1, 2, 3$ einsetzen, bekommen wir 0. Wenn wir $t \neq 1, 2, 3$ einsetzten, bekommen wir Produkt von drei von 0 verschiedenen Zahlen, also nicht 0.)

Also sind $1, 2, 3$ die Eigenwert von A.

Bemerkung *Eigenwerte von f_A werden wir auch Eigenwerte von A nennen*

Bsp. *Der einzige Eigenwert von $Id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist die Nullstelle des Polynoms $\aleph_{Id} = (1-t)^n$, also 1. $Eig_1 = \mathbb{R}^n$.*

Bsp. *Einziger Eigenwert von $\mathbf{0}$ ist die Nullstelle von $\aleph_{\mathbf{0}} = (-t)^n$, also 0. $Eig_0 = \mathbb{R}^n$.*

Bsp. Eigenwerte einer Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ sind die Diagonalelemente λ_i, die Eigenvektoren sind (u.a.) die Basisvektoren e_i

Frage Eine lineare Abbildung ist durch deren Matrix A gegeben. Wie findet man Eigenwerte, Eigenvektoren, und Eigenräume?

1. Man konstruiere das charakteristische Polynom und finde dessen Nullstellen λ_1, λ_2,... (Nicht immer explizit möglich)
2. Für jedes λ_i finde man $Kern_{A-\lambda_i \cdot Id} =: Eig_{\lambda_i}$ (man muss das lineare Gleichungssystem $(A - \lambda \cdot Id)x = \vec{0}$ lösen — immer möglich.)

Bsp. *Die Eigenwerte von* $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *sind die Nullstellen von* $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2$ *und somit* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Eigenvektoren und Eigenraum von $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ zu 1 finden wir, indem wir das LGS $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ lösen: die Lösunsmenge ist $\{t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$. Also ist $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ u.a. ein Eigenvektor.
Eigenvektoren und Eigenraum von $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ zu 2 finden wir, indem wir das LGS $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ lösen: die Lösunsmenge ist $\{t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$. Also ist $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ u.a. ein Eigenvektor.

Exkurs: Polynomdivision mit Rest (Wiederholung)

Lemma 26. Seien f und g Polynome mit $Grad(f) \geq Grad(g) \geq 0$. Dann gibt es Polynome q und r mit $Grad(r) < Grad(f)$, so dass $f = q \cdot g + r$.
Beweis. Sei $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ und $g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$, wobei $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ und $n \geq m$. Setzen wir $q(x) = \frac{a_n}{b_m} x_{n-m}$, dann ist der Grad von $r := (f - q \cdot g)$ höchstens n. Der n-te Koeffizient verschwindet jedoch, also ist $Grad(r) < n$. $\square$
Bsp. zum Beweis. $f = x^3 + x^2 + x + 2$, $g = x + 1$. Wir haben:
$f - \frac{1}{1} x^{3-1} g = x^3 + x^2 + x + 2 - x^2(x+1) = \underbrace{x + 2}_{r}$.

Also $f = \underbrace{x^2}_{q} \cdot \underbrace{x + 1}_{g} + \underbrace{x + 2}_{r}$. Wie gewollt ist $\underbrace{Grad(r)}_{1} < \underbrace{Grad(f)}_{3}$.

Satz 30. (Polynomdivision mit Rest). Für zwei Polynome f und $g \neq 0$ gibt es Polynome q und r mit $Grad(r) < Grad(g)$, so dass $f = q \cdot g + r$.

Bemerkung. Unterschied zu Lemma 26: in Lemma 26 ist $Grad(r) < Grad(f)$. Hier ist $Grad(r) < Grad(g)$.

Beweis von Satz 30. Idee des Beweises: Durch iterierte Anwendung von Lemma 26 kann der Grad des Restpolynoms r so lange verringert werden, bis er kleiner als der Grad von g ist:

Nach Lemma 26 ist $f = q_1 \cdot g + r_1$, wobei $Grad(r_1) < Grad(f)$. Falls $Grad(r_1) < Grad(g)$, sind wir fertig. Sonst ist nach Lemma 26 $r_1 = q_1' \cdot g + r_2$; schließlich $f = q_1 \cdot g + q_1' \cdot g + r_2 = \underbrace{(q_1 + q_1')} g + r_2$.

Wir haben: $Grad(r_2) < Grad(r_1)$.

Falls $Grad(r_2) < Grad(g)$, sind wir fertig. Sonst ist nach Lemma 26 $r_2 = q_2' \cdot g + r_3$; schliesslich $f = q_2 \cdot g + q_2' \cdot g + r_3 = \underbrace{(q_2 + q_2')} g + r_3$

mit $Grad(r_3) < Grad(r_2)$ usw. Nach endlich vielen Schritten (nach höchstens $Grad(f)$ Schritten) bekommen wir $Grad(r) < Grad(g)$. $\square$

Bsp. zum Beweis. $f = x^3 + x^2 + x + 2$, $g = x + 1$. Den ersten Schritt haben wir bereits in Bsp oben (nach Lemma 26) gemacht:
$f = \underbrace{x^2}_{q_1} \cdot \underbrace{(x+1)}_{g} + \underbrace{x+2}_{r_1}$. Wir sehen, dass $Grad(r_1) \not< Grad(g)$. Also ist der 2. Schritt notwendig:
$r_1 = \underbrace{1}_{q_1'} \cdot g + 1$ (weil $\underbrace{x+1}_{g} + 1 = x + 2$). Also
$f = x^2(x+1) + 1 \cdot (x+1) + 1 = \underbrace{(x^2+1)}_{q_2} \underbrace{(x+1)}_{g} + \underbrace{1}_{r_2}$. Wir sehen, dass $Grad(r_2) < Grad(g)$. Also $q = q_2 = x^2 + 1$ und $r = r_2 = 1$.

Bsp.

Wir dividieren (mit Rest)

$2x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1$ durch $x^3 - 2x^2 + x - 2$

$$
\begin{array}{rl}
2x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1 & = (x^3 - 2x^2 + x - 2)\,(2x+3) + 7x^2 + 7 \\
-\;2x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 4x & \\
\hline
3x^3 + x^2 + 3x + 1 & \\
-\;3x^3 + 6x^2 - 3x + 6 & \\
\hline
7x^2 \qquad + 7 &
\end{array}
$$

Lemma 27. *Sei P ein Polynom. Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle von P, so existiert genau ein Polynom Q mit $P = (x - \lambda)Q$.*
Ferner gilt $Grad(Q) = Grad(P) - 1$.

Beweis: Polynomdivision mit Rest von P durch $(x - \lambda)$ ergibt Q, R sodass $P = (x - \lambda)Q + R$. Der Rest R hat Grad $< Grad(x - \lambda) = 1$ und ist deswegen ein Skalar $r \in \mathbb{R}$. Da λ eine Nullstelle von P ist, ist $0 = P(\lambda) = \underbrace{(\lambda - \lambda)Q(\lambda)}_{=0} + \underbrace{R(\lambda)}_{=r} = r$ und somit $P = (x - \lambda)Q$. Also ist
$Grad(P) = Grad(x - \lambda) + Grad(Q) = 1 + Grad(Q)$. $\square$

Anwendung.

Wenn man eine Nullstelle eines Polynoms kennt (z.B. wenn man sie erraten hat), kann man Polynomdivision benutzen, um weitere Nullstellen zu finden.

Bsp. Sei $P = x^4 - x^3 - 5\,x^2 + x + 4$. Ich habe eine Nullstelle erraten: $x = -1$ ist eine Nullstelle. Dann ist $P = (x+1) \cdot Q$, wobei Q ein Polynom vom Grad 3 ist. Wir dividieren P durch $(x+1)$ um Q zu bestimmen: $Q = x^3 - 2\,x^2 - 3\,x + 4$. Ich habe auch eine Nullstelle von Q erraten: $x = 1$ ist eine Nullstelle. Dividieren von Q durch $(x-1)$ ergibt $x^2 - x - 4$; also $P = (x+1)Q = (x+1)(x-1)(\underbrace{x^2 - x - 4}_{Q'})$. Da Polynom Q' quadratisch ist, können wir die Nullstellen von Q' mit der $p-q-$Formel finden: $x_\pm = 1/2 \pm 1/2\,\sqrt{17}$.

Also sind $\underbrace{1, -1}_{\text{erraten}}, \underbrace{1/2 + 1/2\,\sqrt{17}, 1/2 - 1/2\,\sqrt{17}}_{\text{mit Polynomdivision gefunden}}$ die Nullstellen von P.

Lemma 28 *Jedes Polynom P von Grad n hat höchstens n paarweise verschiedene Nullstellen.*

Folgerung. *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*

Beweis der Folgerung. Nach Lemma 25 ist $Grad(\aleph_f) = n$, nach Lemma 28 hat dann $\aleph_f$ höchstens n paarweise verschiedene Nullstellen. Nach Satz 29 sind die Nullstellen von $\aleph_f$ genau die Eigenwerte von f. $\square$

Beweis von Lemma 28. Wir beweisen, dass ein Polynom $P \neq 0$ vom Grad n höhstens n verschidenen Nullstellen hat. Induktion nach $n = Grad(P)$:
I.A.: Für $n = 0$ ist $P = r \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Longrightarrow P$ hat keine Nullstelle.
I.V.: Die Aussage sei richtig für ein $n - 1$.
I.S.: Z.z., dass die Aussage auch für n stimmt. Hat P keine Nullstelle,so ist $k = 0$ und die Aussage trivial.Ist dagegen λ eine Nullstelle von P, dann existiert ein Polynom Q mit $Grad(Q) = n - 1$ und $P = (x - \lambda) \cdot Q$. Jede andere Nullstelle $\mu \neq \lambda$ von P ist auch Nullstelle von Q. Nach IV hat Q höchstens $n - 1$ verschiedene Nullstellen. $\Longrightarrow P$ hat höchstens n verschiedene Nullstellen. $\square$

Satz 31 *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $v_1, ..., v_m \in V$ Eigenvektoren von f zu den paarweise verschiedenen $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$. Dann sind $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig.*

Beweis. Induktion nach m:
I.A. Sei $m = 1$. Da $v_1 \neq \vec{0}$, ist $\{v_1\}$ linear unabhängig.
I.V. Satz sei richtig für $m - 1$.
I.S. Sei $a_1 v_1 + ... + a_m v_m = \vec{0}, \qquad (*)$
wobei $a_i \in \mathbb{R}$. Z. z.: $0 = a_1 = ... = a_m$.
Wir haben: $\vec{0} = f(\vec{0}) = f(a_1 v_1 + ... + a_m v_m) \overset{\text{Linearität}}{=}$
$a_1 f(v_1) + ... + a_m f(v_m) \overset{\text{Def. Eigenvektor}}{=} a_1 \lambda_1 v_1 + ... + a_m \lambda_m v_m$. Wir ziehen λ_m mal die Gleichung $(*)$ ab: Wir bekommen:
$\vec{0} = a_1(\lambda_1 - \lambda_m)v_1 + ... + a_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)v_{m-1} + 0 \cdot v_m$. Nach I.V. sind die Vektoren $v_1, ..., v_{m-1}$ linear unabhängig. Dann sind alle Koeffizienten $a_i \underbrace{(\lambda_i - \lambda_m)}_{\neq 0 \text{Nach Voraussetz.}} = 0$, also a_1, a_2,...$a_{m-1} = 0$, und $(*)$ lautet $a_m v_m = \vec{0}$. Dann ist auch $a_m = 0$. $\square$

Def. *Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt diagonalisierbar, falls seine Matrix in einer Basis Diagonalgestalt hat (= nur die Diagonalelemente können von 0 verschieden sein.) Eine quadratische Matrix A ist diagonalisierbar, falls deren Endomorphismus f_A diagonalisierbar ist. (Äquivalent: falls sie zu einer diagonalen Matrix ähnlich ist)*

Satz 32 *Ein Endomorphismus von einem endlichdimensionalen V ist g.d. diagonalisierbar, wenn es eine Basis gibt, s.d. jeder Basisvektor ein Eigenvektor ist. Ferner gilt: die darstellende Matrix des Endomorphismus in dieser Basis ist diagonal; auf dem $(i, i)-$Platz der Diagonale steht der Eigenwert von $i-$ten Basisvektor*

Beweis. Zuerst "$\Longrightarrow$". Ist ein Endomorphismus diagonalisierbar, so gibt es eine Basis $(b_1, ..., b_n)$, s.d. die Matrix des Endomorphismus diagonal ist: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Dann ist $f(b_i) = \lambda_i\, b_i$ (weil die Koordinaten von $f(b_i)$ in der Basis $(b_1, ..., b_n)$ die $i-$te Spalte von A bilden, also $f(b_i) = 0 \cdot b_1 + ... + \lambda_i b_i + ... + 0 \cdot b_n = \lambda_i b_i$).

" $\Longleftarrow$ ". Sind die Basisvektoren b_i Eigenvektoren, so ist $f(b_i) = \lambda_i\, b_i = 0\, b_1 + ... + \lambda_i b_i + ... + 0\, b_n$, also ist $\lambda_i \cdot e_i$ der Koordinatenvektor von $f(b_i)$ in der Basis $(b_1, ..., b_n)$und die Matrix der Abbildung ist eine Diagonalmatrix. □

Folgerung *Ist $dim(V) = n$ und hat der Endormorphismus $f : V \to V$ n paarweise verschiedene Eigenwerte, dann ist f diagonalisierbar.*

Beweis. Seien $v_1, \dots, v_n$ Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten. Satz 31 liefert nun, dass sie linear unabhängig sind. Wegen $dim(V) = n$ folgt, dass sie eine Basis von V bilden. Nach Satz 32 ist dann der Endomorphismus diagonalisierbar. □

Bsp. $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar. Tatsächlich, wie wir oben gezeigt haben, hat $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2$ zwei Nullstellen 1 und 2.

Oben haben wir auch die Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 1 und $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 2 gefunden. Dann muss die darstellende Matrix bzgl. der Basis $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ diagonal sein. Wir rechnen das nach: die Transformationsmatrix B ist $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Nach der Folgerung vom Anfang dieser Vorlesung ist die darst. Matrix von f_A in der neuen Basis $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ gleich

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} B.$$

Bemerkung. Die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ habe ich mit Hilfe von Leibnitz-Formel invertiert, siehe Satz 24: in Dim 2 gilt: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ (und für die unsere Matrix B gilt $ad - bc = \det(B) = 1$).

Nicht alle Matrizen sind diagonalisierbar

Bsp. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht diagonalisierbar. Tatsächlich, $\aleph_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = det\begin{pmatrix} -t & 1 \\ 0 & -t \end{pmatrix} = t^2$.

Wir haben nur eine Nullstelle $\lambda = 0$. Kann man eine Basis aus Eigenvektoren finden? Nein, denn *Kern* $_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$ hat nach der Dimensionsformel die Dimension $\underbrace{2}_{dim(V)} - \underbrace{1}_{rk(A)} = 1$. Also gibt es keine zwei linear unabhängigen Eigenvektoren und die Matrix ist nach Satz 32 nicht diagonalisierbar.

Bemerkung *Satz 32 enthält auch die Information, wie man die Basis findet, in welcher die Matrix einer gegebenen Abbildung diagonal ist, falls das charakteristische Polynom* $n = dim(V)$ *verschiedene Eigenwerte hat: die Basisvektoren sind die Eigenvektoren.*

Gegeben sei die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch die darstellende Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ich bestimme nun eine Basis vom $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von φ. Sprich: Wir diagonalisieren die Matrix A.

Dafür verschaffe ich mir zunächst einen Überblick über die möglichen Eigenwerte.

$$\det \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2 = 4 \Leftrightarrow 1-\lambda = \pm 2$$

Also die Eigenwerte sind $-1,3$. Wir suchen zuerst einen Eigenvektor zu -1.

Nun müssen die Eigenvektoren bestimmt werden. Allgemein geht dies mit dem Lösen eines LGS mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

Es muss $Kern(A + 1 \bullet \mathrm{Id})$ gelöst werden, also zunächst einmal das Gleichungssystem:

$$(A + 1 \bullet \mathrm{Id}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 2x_1 + 2x_2 = 0$$

Es gibt also unendlich viele Lösungen, wir wählen eine

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Analog ergibt sich:

$$(A - 3 \bullet \mathrm{Id}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -2x_1 + 2x_2 = 0$$

Es gibt also unendlich viele Lösungen, wir wählen eine

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Basis in der f_A diagonal ist, ist deswegen $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Die Transformationsmatrix B ist daher $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dann muss $B^{-1}AB$ diagonal sein. Um zu prüfen, ob wir uns nicht verrechnen haben, rechnen wir nach:
$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ wie es sein sollte.

Anwendung *Sei A eine diagonalisierbare Matrix. Wie kann man A^k für beliebiges k ausrechnen?*

1. Finde eine Matrix B s.d. $B^{-1}AB$ diagonal ist, also $B^{-1}AB := \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Wir haben $B\Lambda B^{-1} = A$. (Nicht immer möglich)

2. Dann ist $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{k \text{ Stuck}} = B\Lambda \underbrace{B^{-1}B}_{Id} \Lambda B^{-1} ... B\Lambda B^{-1} =$

   $$B\Lambda^k B^{-1} = B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k \cdot B^{-1} = B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \cdot B^{-1}.$$

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?

Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache dar und lösen das Problem mit den heute gelernten Methoden. Dazu setzen wir $v_n := \binom{f_{n+1}}{f_n} \in \mathbb{R}^2$, es gilt dann $v_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} v_n = \binom{f_{n+1} + f_n}{f_{n+1}}$, also

$v_n = Av_{n-1} = A \cdot A \cdot v_{n-2} = ... = A^n v_0 = A^n \binom{1}{0}$.

Rechnen wir jetzt die Matrix A^n aus. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $\aleph_A = det\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = (1-t)(-t) - 1 = t^2 - t - 1$ und somit $\lambda_\pm := \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Nach Folgerung aus Satz 32 ist die Matrix diagonalisierbar. Ein Eigenvektor zu $\lambda_\pm$ ist eine (nichtriviale) Lösung des linearen Gleichungssystems $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda_\pm \cdot Id\right) \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \iff$ $(1 - \lambda_\pm)x + y = 0 \iff \binom{x}{y} = t \cdot \binom{1}{\lambda_\pm - 1}$.

Also sind die Basisvektoren, für die die Abbildung eine diagonale Matrix hat, $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_+ - 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_- - 1 \end{pmatrix}$ und die Abbildung hat in dieser Basis die Matrix $\begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$. Die Matrix B ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_+ - 1 & \lambda_- - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \frac{1}{\lambda_- - \lambda_+} \begin{pmatrix} \lambda_- - 1 & -1 \\ 1 - \lambda_+ & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & -1 \end{pmatrix}$

Dann ist (s. Anwendung)

$A^k =$

$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_+^k & 0 \\ 0 & \lambda_-^k \end{pmatrix} \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \cdot$

$\begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k . \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}} & * \end{pmatrix}$

Da $\begin{pmatrix} f_{k+1} \\ f_k \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ist $f_k := \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}}$.